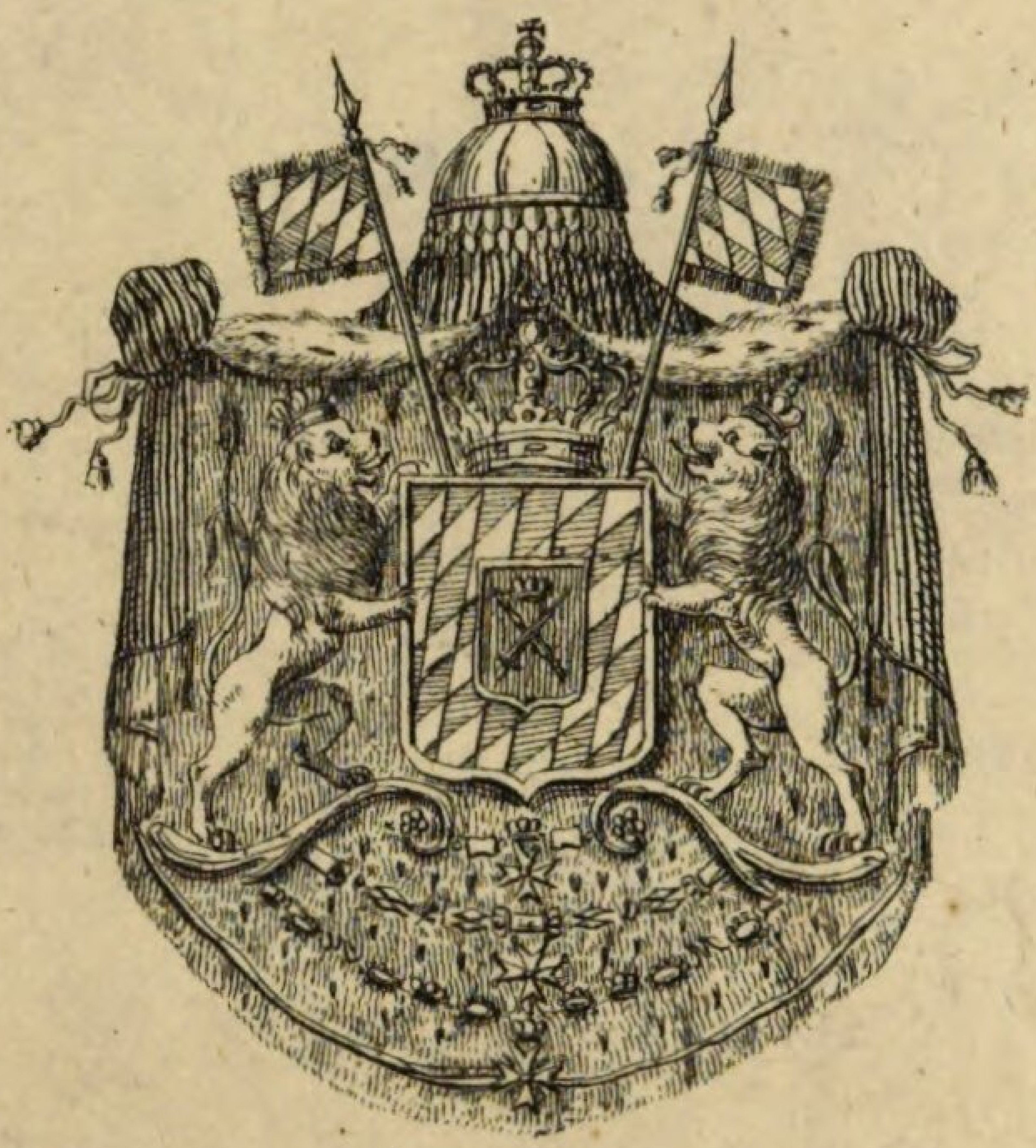
Math.p. 338 q-1 f



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36604499600017

<36604499600017

Bayer. Staatsbibliothek

R

Vollständiger Lehrbegriff

der

höhern Analysis

von

Johann Tobias Mayer,

Königlich-Großbritannischen Hofrath und Professor
in Göttingen.

R

Erster Theil.

Die Differenzialrechnung.

Mit zwey Kupfertafeln.

Göttingen,

Im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht.

1818.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Gegenwärtige Anleitung zur höhern Analysis, in so weit sie die Differenzial- und Integralrechnung umfasset, wird hoffentlich denen nicht unangenehm seyn, welche sich von den mancherley Kunstgriffen, womit insbesondere die Integralrechnung bereichert worden ist, vollständiger zu unterrichten wünschen, als es aus den bisher in Deutschland erschienenen Lehrbüchern jener Wissenschaft geschehen kann. Mir ist keine Anleitung in unserer Sprache bekannt, welche außer der gewöhnlichen Integralrechnung, sich insbesondere auch über die Integration der höhern Differenzialgleichungen, der Gleichungen mit partiellen Differenzialen, und über mehr andere hieher gehörige Gegenstände, mit einiger Vollständigkeit verbreitete, und darum glaubte ich keine unnütze Arbeit zu übernehmen, diesem

sem Mangel abzuhelfen, und von der gesammten Integralrechnung, so weit sie in unserer Gewalt steht, mit möglichster Befolgung der gewöhnlichen Form der mathematischen Methode, welche ohnstreitig eine bessere Uebersicht des Ganzen, als jede andere Lehrart verstattet, das wichtigste und unentbehrlichste beyzubringen, auch alles durch zweckmäßige Beyspiele zu erläutern. Ich hoffe dadurch zugleich, ohne Nachtheil der Gründlichkeit und Vollständigkeit, jede ermüdende Weitschweifigkeit vermieden zu haben, welche man insbesondere an denjenigen Schriften zu tadeln hat, welche von jener Form der mathematischen Methode abgegangen sind.

Daß das gegenwärtige Werk nicht als ein bloßes Lehrbuch zu betrachten ist, wird die Menge der darin behandelten Gegenstände ausweisen. Will sich aber ein Lehrer auch desselben zum Unterrichte bedienen, so wird er von den darin vorkommenden Lehrsätzen, Aufgaben und Beyspielen, leicht diejenigen auszuwählen wissen, welche seinem Zwecke angemessen sind. Das übrige bleibt dem Schüler

zum

zum Selbststudium überlassen, zu welchem Behuf man in diesem Lehrbegriff schwerlich irgend einen wesentlichen Gegenstand vermissen wird.

Man wird finden, daß ich mich insbesondere in der Integralrechnung bemüht habe, immer so viel als möglich das allgemeine und brauchbare auszuheben, und dadurch die unnütze Weitläuftigkeit zu vermeiden, die die Betrachtung viel einzelner Fälle verursacht, und wodurch viel voluminösere Werke deswegen nicht für vollständiger gehalten werden können. (M. sehe z. B. den 244sten §. der Integralrechnung.)

Bey Entwickelung der Grundbegriffe der Differenzialrechnung habe ich der bisher bey den besten Schriftstellern Deutschlands üblich gewesenen Darstellungsart den Vorzug ertheilt, und darüber wird, nach den §. 1 — 3 gegebenen Erläuterungen, keine weitere Rechtfertigung nöthig seyn. Indessen habe ich auch von andern Ansichten des Differenzialcalculs gesprochen. Bey ihrer Anwendung auf wirkliche Gegenstände der Geometrie, Mechanik

u. s. w. hat sich ergeben, daß das Unendlich-kleine sich doch überall mehr oder weniger in die Untersuchungen einschleicht, oder man doch in große Weitläuftigkeit verfällt, wenn die einem solchen Gegenstande entsprechende fonction prime oder seconde, ohne alle Betrachtung des unendlich Kleinen gehörig entwickelt werden soll. So bald nämlich eine Funktion φx wirklich vorgegeben ist, so hat es freilich keine Schwürigkeit, die $\varphi' x$, $\varphi'' x$ rc. also die fonctions prime, seconde rc. daraus abzuleiten. Wenn aber eine Aufgabe vorgegeben ist, aus deren Natur und Beschaffenheit selbst, jene $\varphi' x$, $\varphi'' x$ erst entwickelt werden sollen, ohne die der Aufgabe entsprechende ursprüngliche Function φx selbst zu kennen, so entstehen oft große Schwürigkeiten, wenn die für $\varphi' x$, $\varphi'' x$ rc. aufgefundenen Formen in der gehörigen Schärfe, und mit Ausschluß jeder Betrachtung des unendlich Kleinen sollen erwiesen werden können, wovon ich leicht Beyspiele anführen könnte, wenn hier der Ort dazu wäre. Die pedantische Aengstlichkeit, mit der man das unendliche

liche Abnehmen von Größen bey der Darstellung der Differenzialrechnung zu vermeiden sucht, hat der Wissenschaft mehr geschadet als genützt, und schwerlich wird ein Mathematiker bey den Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung auf wirkliche Gegenstände der Natur, sich des schwerfälligen Ganges der La Grangischen Funktionen Lehre, der darin gebrauchten ungewöhnlichen Bezeichnungsarten u. s. w. bedienen.

In der Differenzialrechnung habe ich durch allerley Anwendungen, sowohl den Geist dieser Rechnung noch mehr zu erläutern gesucht, als auch in diesen Anwendungen und deren Folgerungen diejenigen Sätze zugleich mit entwickelt, welche für die Integralrechnung unentbehrlich waren. Aber Anwendungen der Integralrechnung wird in einer Anleitung zu dieser Wissenschaft Niemand verlangen, da sie auch zur Erläuterung des eigentlichen Wesens dieser Rechnung weniger, als bey der Differenzialrechnung erforderlich waren. Auf eine große Menge der in der Integralrechnung vorkommenden Formeln ist man

ohnehin durch die würkliche Anwendung gekommen, aber es würde sehr weitläuftig gewesen seyn, wenn ich überall eine mathematische Untersuchung hätte anführen wollen, wodurch man auf eine solche Formel geleitet worden war. Indessen kann man die Anwendung von einigen solchen Integralen auf geometrische Gegenstände in dem 5ten Theile meiner practischen Geometrie, welcher die Stereometrie behandelt, nachsehen.

Ohngeachtet die Variationsrechnung demjenigen keine Schwürigkeit machen wird, welcher das in gegenwärtigen beyden Bänden der höhern Analysis vorkommende sich gehörig bekannt gemacht hat, so kann es doch seyn, daß ich auch diese noch in einem besondern Bändchen nachfolgen lasse.

In-

Inhalt der Differenzialrechnung.

Einleitung.

Einige allgemeine Sätze über die Functionen.

Erklärung und Bezeichnungsart der Funktionen §. I:

Algebraische, rationale, irrationale, gleichartige ꝛc. Funktion §§. II — VI.

Allgemeiner Ausdruck für jede Function von einer oder zwey veränderlichen Größen §§. VII. VIII.

Functionen mit imaginären Ausdrücken §. IX.

Zerlegung der Bruchfunctionen in einfache Brüche ꝛc. §§. X — XVI.

Vorbegriffe der Differenzialrechnung.

Erläuterungen über den Begriff des Unendlichen §. I.

Verschiedene Ordnungen oder Dimensionen des Unendlichen das. XVII.

Das Unendlichkleine das. XIX. ꝛc.

Gränzverhältnisse das. XXXIV.

Erstes Kapitel.

Verschiedene Vorstellungsarten des Grundbegriffs der Differenzialrechnung 1) als Lehre von den Gränzverhältnissen §. 2. I — XIII. 2) Nach den Ansichten La Granges, Arbogasts, Klügels das. XIV — XVII.

La Croix's Urtheil über die gewöhnliche Vorstellungsart, und ihren Vorzügen bey der Anwendung. das. XVIII.

Die

Die Function $Ax^n + B$ zu differenziiren §§. 3. 4.

Differenzial einer aus mehreren veränderlichen Theilen zusammengesetzte Function, nebst Beyspielen §. 5. ꝛc.

Differenzial eines Products §. 8. ꝛc. nebst Beyspielen.

Differenzial eines Quotienten, oder Bruchfunction §. 15. ꝛc. von so viel veränderlichen Größen als man will §. 17.

Partielle Differenziale und deren Bezeichnungsart §. 17. V. ꝛc.

Logarithmische Functionen zu differenziiren §§. 18 — 32.

Exponenzial-Größen zu differenziiren §. 33. ꝛc.

Differenziale von trigonometrischen und Kreis-Functionen §. 38. ꝛc., nebst daraus abgeleiteten imaginären Formen, zum Behuf der Integralrechnung im folgenden. §. 48.

Daraus ferner Vorschriften für die Zerfällung rationaler ganzer Functionen von der Form $x^n \pm a^n$ in einfache und Trimonialfactoren, gleichfalls für den Gebrauch in der Integralrechnung. §. 48. XVI. ꝛc.

Von den höhern Differenzialen §. 49.

Nöthige Erläuterungen über höhere Differenzialausdrücke, welche keine bestimmte Werthe haben, wenn nicht ein gewisses Differenzial als unveränderlich angenommen wird §. 50. ꝛc.

Ausdrücke in höhern Differenzialen, welche für ein gewisses constant gesetztes erstes Differenzial, einen bestimmten Werth erhalten, in andere zu verwandeln, welche denselben Werth geben, was für ein anderes Differenzial auch constant gesetzt werden mag, eine nützliche Aufgabe bey manchen Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung §. 57.

Eigenschaften von Differenzialgleichungen — Bedingungsgleichungen, wenn $Pdx + Qdy + Rdz$ ein würkliches Differenzial soll seyn können §. 58 — 63. Bossut, Fontaine, Clairaut, Euler §. 61.

Eigenschaften gleichartiger Functionen §. 62. 64.

Beweis des wichtigen Lehrsatzes

$$\left(\frac{d^n\left(\frac{d^m z}{d x^m}\right)}{d y^n}\right) = \left(\frac{d^m\left(\frac{d^n z}{d y^n}\right)}{d x^m}\right)$$ §. 66. ꝛc.

nebst Beyspielen.

Ein anderer wichtiger Lehrsatz, höhere Differenzialquotienten betreffend, durch eine Bedingungsgleichung ausgedrückt §. 68. 69.

Eulers Ableitung desselben aus der Variationsrechnung §. 70.

Taylors Lehrsatz §. 71. nebst mehreren Beyspielen, zum Behufe des Folgenden in der Integralrechnung §. 73.

Reihen für logarithmische und andere transscendente Größen §. 74.

La Grange's Theorem §§. 75. 76., nebst Beyspielen §. 77.

Zweytes Kapitel.

Fernere Anwendungen der Differenzialrechnung zum Behuf einer genauern Kenntniß des wahren Geistes dieser Rechnung, und in Rücksicht auf die Anwendung vieler bey dieser Gelegenheit entwickelter Formeln auf die Integralrechnung im Folgenden.

Reihen auf Potenzen zu erheben, durch Anwendung der Differenzialrechnung §. 78.

Den Werth des Quotienten $\frac{fx}{\varphi x}$ zu bestimmen, wenn fx, und φx für $x = a$ verschwinden, und also der angeführte Quotient unbestimmt zu seyn scheint §. 79. nebst Beyspielen §. 80.

Den Unterschied zweyer unendlich werdenden Ausdrücke zu bestimmen §. 81.

Bruchfunctionen in einfache Brüche zu zerlegen, durch Beihülfe der Differenzialrechnung, zum Gebrauch für die Integralrechnung §. 82.

Vom Größten und Kleinsten §. 85. 86. nebst Beyspielen §. 87 ꝛc. Wie bey vielförmigen Functionen zu verfahren ist §. 88.

Größte

Größte und kleinste Werthe einer Function von zwey veränderlichen Größen §. 89. nebst Beyspielen. das. XV. ꝛc.

Bemerkungen in dieser Lehre, wenn die Gleichung $\frac{dy}{dx}=0$, Werthe von x giebt, für welche mehrere von den Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ꝛc. unendlich werden §. 90.

Tangenten und Normallinien an krumme Linien zu ziehen, wenn die Coordinaten rechtwinklicht auf einander stehen §§. 91. 92.

Eben diese Aufgaben für Ordinaten aus einem Punkte §§. 93. 94.

Erläuterung durch Beyspiele §. 95.

Bestimmung des Differenzialverhältnisses $\frac{ds}{dx}$, wenn s den Bogen einer krummen Linie bezeichnet, zu dem die Abscisse x gehört §. 96.

Krümmungskreise, Krümmungshalbmesser, nebst noch einigen andern damit in Verbindung stehenden Betrachtungen §. 97. 98. ꝛc.

Einige Druckfehler.

S. 41. Zeile 11 statt, als ∞ lies als ∞^2.
— 134. Z. 3 st. $\sqrt{1}$ — l. $\sqrt{-1}$.
— 153. Z. 21 st. P d l. d P.
Z. 22 st. Q d l. d Q.
— 188. Z. 12 st. Aufg. l. Aufl.
— 321. Z. 3 st. y l. 2 y.

Einleitung.

Einige allgemeine Sätze über die Functionen.

§. I.

1. Wenn x, y, z nach Gefallen veränderliche Grössen bedeuten, so wird ein jeder Ausdruck, welcher durch eine oder mehrere solcher veränderlicher Grössen gegeben ist z. B. $ax^2 + b$; $x^3 + 2y^2 + 5$; $xy^2 + z + bx$; $\surd(ax + by)$; $\log \frac{ax + by}{cx + z}$ u. d. gl. eine Function dieser veränderlichen Grössen genannt.

2. Man bezeichnet gewöhnlich die veränderlichen Grössen mit den letztern Buchstaben des Alphabeths, und die unveränderlichen d. i. diejenigen deren Werth man ungeändert läßt,

 wäh=

während jene als variabel betrachtet werden, mit den erstern Buchstaben desselben.

3. Oft werden ganze Functionen selbst wieder mit besondern Buchstaben bezeichnet, wozu man denn gewöhnlich die grössern des Alphabeths gebraucht z. B. X, Y, um eine Function von x oder y anzudeuten.

4. In der neuern Analysis bedient man sich öfters des Buchstabens f (lateinisch oder griechisch) statt des Worts Function. Z. B. $f(x)$, $\varphi(x)$ oder auch schlechtweg fx, φx um eine Function von x anzudeuten; $f(x, y)$; $f(x, y, z)$ um eine von x und y, oder von x, y, und z u. s. w. zu bezeichnen.

5. Unterweilen findet man auch Ausdrücke von der Form $f(\varphi x)$, welche andeuten wollen, daß man von φx einer Function von x, wieder eiue Function nehmen soll. Z. B. wenn $\varphi x = a + bx^2$ wäre, so würde $f(\varphi x)$ wieder eine Function von $a + bx^2$ bedeuten, z. B. $(a + bx^2)^m$; $\sqrt{(a + bx^2)}$; $\log(a + bx^2)$ u. d. gl.

Andere Schriftsteller bedienen sich auch noch anderer Zeichen für diese oder jene unbestimmten Functionen.

§. II.

1. Algebraisch heißt eine Function, wenn sie in einem Ausdrucke besteht, worin die veränderlichen Grössen bloß durch algebraische Operationen, nemlich durch die vier Rechnungsspezies, oder auch durch Potenziirungen oder Wurzelausziehungen in Verbindung stehen z. B. die erstern vier Ausdrücke in (§. I).

2. Kommen aber in einem solchen Ausdrucke auch Bezeichnungen vor, von denen man zeigen kann, daß ihnen eigentlich unendlich viele Werthe entsprechen, so wird er eine transcendente Function in Beziehung auf die veränderlichen Grössen genannt. So weiß man z. B. aus der Trigonometrie, daß einer jeden trigonometrischen Linie unzählig viele Bögen entsprechen. Bedeutet daher die Bezeichnung Arc sin x Arc tang x einen Bogen dessen Sinus oder Tangente $= x$ ist, so ist der Ausdruck Arc sin x; Arc tang x u. dgl. eine transcendente Function von x. So auch $x^m + \text{Arc sin } x$; $\sqrt{(a + b \text{ Arc sin } x)}$ u. d. gl.

3. So ist auch bekannt, daß in einem und demselben logarithmischen Systeme zu jeder Zahl x nicht nur ein möglicher Logarithme, sondern auch unzählige von einer unmöglichen oder imaginären

Form gehören, so wie es Gleichungen giebt, worin die unbekannte Grösse nicht nur mögliche sondern auch unmögliche Werthe hat, die ihnen ein Genüge leisten. Daher sind also auch Ausdrücke wie $\log x$; $(a + b \log x)^m$ u. d. gl. transscendente Functionen von x. Hieher gehören auch unendliche Reihen, welche durch eine veränderliche Grösse gegeben sind, wenn sich zeigen läßt, daß der Werth einer solchen Reihe durch keinen algebraischen Ausdruck (§. II. 1.) in einer endlichen Anzahl von Gliedern sich darstellen läßt.

§. III.

1. Die algebraischen Functionen sind entweder rationale oder irrationale, je nachdem sie Potenzen der veränderlichen Grössen nur allein mit ganzen Exponenten, oder auch mit Bruchexponenten enthalten. So z. B. ist $\left(\frac{a x^m + b x^n}{c x^\mu + d x^\nu}\right)^p$ eine rationale Function von x wenn die Exponenten m, n, μ, ν, p lauter ganze Zahlen sind. Bestehen sie aber alle oder auch nur zum Theil aus Brüchen, so würde der Ausdruck eine irrationale Function von x genannt werden müssen.

2. Ausdrücke in Bruchform z. B. $\frac{a x^2 + b}{c y + e}$

heißen

heißen Bruchfunctionen (functiones fractae). Ganze Functionen (functiones integrae) sind solche, welche weder negative Exponenten von x, y, enthalten, noch auch sonst in Bruchform angegeben sind. Die unveränderlichen Grössen können nach Gefallen Brüche seyn.

§. IV.

1. Gleichartig (homogenea) heist eine Function. Z. B.

$$Ax^{\alpha}\, y^{\beta} + Bx^{\gamma}\, y^{\delta} + Cx^{\varepsilon}\, y^{\eta}$$

wenn die Summe der Exponenten von x und y in jedem Gliede gleich groß ist, nemlich $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \eta$, wie auch übrigens α, β, γ rc. bejaht oder verneint seyn mögen.

So auch bey Bruchfunctionen, z. B.

$$\frac{Ax^{\alpha}}{y^{\beta}} + \frac{Bx^{\gamma}}{x^{\delta} + y^{\delta}}$$

wenn $\alpha - \beta = \gamma - \delta$.

2. Die Summe jener Exponenten wird die Dimension der gleichartigen Function genannt.

3. Ein ganz unveränderliches Glied darf eine solche Function nicht enthalten. So würde z. B. $A + Bx^{\gamma}\, y^{\delta} + Cx^{\varepsilon}\, y^{\eta}$ keine gleichartige Function

ction sein, wenn gleich $\gamma + \delta = \varepsilon + \eta$ wäre, es müste denn $\gamma + \delta = \varepsilon + \eta = 0$, also $\delta = -\gamma$; $\eta = -\varepsilon$, mithin die Function selbst von der Dimension Null seyn, wie es das unveränderliche Glied A ist, welches man ansehen kann, als in $x^0 y^0$ multiplicirt.

§. V.

1. Wenn ein Functional-Ausdruck in Form einer Gleichung vorgegeben ist, z. B.

$$y^2 + axy + b = 0$$

so läßt sich für jedes x der Werth von y finden, d. h. y ist eine Function von x, und umgekehrt auch x wieder eine Function von y.

2. In so fern man aber die Gleichung erst auflösen muß, um die eine Größe z. B. y von der andern x rein oder abgesondert zu erhalten, nennt man das y in jener Gleichung eine ungesonderte (unentwickelte) Function von x (functio implicita).

3. Löst man aber die Gleichung auf und setzt

$$y = -\tfrac{1}{2}ax \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2x^2 - b)}$$

so ist nunmehr der algebraische Ausdruck angegeben, wodurch y durch x bestimmt wird, d. h. y ist nunmehr eine gesonderte (entwickelte) Function von x (functio explicita).

Eben

Eben so ist aus jener Gleichung

$$x = - \frac{b + y^2}{ay}$$

eine gesonderte Function von y.

§. VI.

Da die allgemeine Auflösung höherer Gleichungen als vom vierten Grade, nicht in unserer Gewalt steht, so lassen sich solche ungesonderte Functionen von höhern Graden allgemein auch nicht in gesonderte verwandeln; oder man müßte denn unendliche Reihen zu Hülfe nehmen, in welchem Falle man denn für y eine solche Reihe annimmt, und deren Coefficienten nach den in der Analysis bekannten Methoden zu bestimmen sucht. Den nützlichen Gebrauch des Neutonianischen Parallelogramms hiebey, hat umständlich Kästner in seiner Analysis des Endlichen §. 631. u. f. gelehrt, auf welche Schrift ich also meine Leser verweise.

§. VII.

1. Es mag nun y eine solche gesonderte oder auch ungesonderte Function von x seyn, so muß doch y aus x immer durch eine gewisse Rechnung entweder völlig genau, oder durch Annäherung gefunden werden können, auch mag dabey y eine alge-

algebraische oder transscendente Function von x seyn.

2. Aber jede Rechnung, welche mit einer Größe x vorgenommen wird, um daraus eine andere y, welche als Function von jener betrachtet wird, abzuleiten, ist nur ein Resultat einfacher oder wiederhohlter Verbindungen von x oder von Theilen des x, sowohl unter sich selbst, als auch mit andern von x unabhängigen oder constanten Grössen und Zahlen, durch den Weg der vier arithmetischen Spezies (wohin wir auch noch die Wurzelausziehungen rechnen können), woraus sich denn weiter ergiebt, daß y als Function von x, sich allemahl in der größten Allgemeinheit durch einen Ausdruck von der Form

$$y = A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + Dx^{\gamma} \text{ u. s. w.}$$

muß darstellen lassen, wobey wir uns jetzt nicht darum bekümmern, was für diesen oder jenen besondern Fall die Grössen A, B, C ꝛc. α, β, γ für bestimmte bejahte oder verneinte Werthe oder Zahlen seyn müssen, um den Werth von y durch x zu erhalten, es sey völlig genau, oder durch Annäherung.

Denn wenn kein solcher Ausdruck sich für y angeben ließe, so würde y aus x sich auch nicht bestimmen lassen, und dennoch ist klar daß

y

y aus x muß berechnet werden können. Jener Ausdruck für y enthält alle einzelnen algebraischen Operationen, welche mit x, oder auch mit Theilen von x vorgenommen werden können, und wollten wir auch statt jenes Ausdrucks noch einen allgemeinern oder mehrere dergleichen z. E. von der Form $\frac{(a x^m + b x^n \ldots)^p}{(\alpha x^\mu + \beta x^\nu \ldots)^q}$ uns gedenken, um dadurch die Operationen auszudrücken, welche mit der veränderlichen Grösse x vorgenommen werden müsten, um das y zu bestimmen, so weiß man doch, daß solche Ausdrücke am Ende sich immer in $A x^\alpha + B x^\beta + C x^\gamma$ u. s. w. verwandeln lassen.

3. Daher also eine jede Function von x, sie sey algebraisch oder transscendent, sich allgemein immer durch $A x^\alpha + B x^\beta + C x^\gamma$ u. s. w. muß ausdrücken lassen, wobey wir uns hier nicht darum bekümmern, wie in einzeln Fällen dieser Ausdruck aus einer endlichen Anzahl von Gliedern oder aus einer unendlichen bestehen mag.

§. VIII.

1. So erhellet denn auf eine ähnliche Weise, daß auch jede Function zwischen zwey veränderlichen Grössen immer auf die Form

Ax^α

$$Ax^{\alpha}\, y^{\beta} + Bx^{\gamma}\, x^{\delta} + Cx^{\varepsilon}\, y^{\zeta} \text{ u. s. w.}$$

muß zurückgebracht werden können, die Function sey algebraisch oder transcendent. Denn dieser Ausdruck enthält alle möglichen Verbindungen in welche die Grössen x und y durch die vier arithmeschen Spezies gebracht werden können, um durch irgend eine Rechnung den Werth der Function zu erhalten. Was aber in einem vorkommenden Falle z. B. für $\sqrt{(a + cxy)}$, für die transscendente Function Arc sin $\frac{x}{y}$ u. dergl. jene Coefficienten A, B, C rc. und Exponenten α, β, γ rc. für Werthe haben würden, ferner ob jener Ausdruck aus einer endlichen oder unendlichen Zahl von Gliedern bestehen wird, gehört jetzt nicht hieher. Zu dem Gebrauche den wir in der Folge hievon machen, ist es hinlänglich gezeigt zu haben, daß es einen solchen Ausdruck allemahl muß geben können, wenn es anders möglich seyn soll, den Werth einer solchen Function aus ihren veränderlichen Grössen zu berechnen.

2. Es giebt Fälle wo eine solche Function für gewisse Werthe von x und y eine Absurdität oder auch etwas unmögliches involvirt. Gewöhnlich zeigt sich dies auch schon aus der Beschaffenheit des dafür gefundenen Ausdrucks

Ax^α

$A x^{\alpha} y^{\beta} + B x^{\gamma} y^{\delta} \ldots$

So z. B. erhält man für die Function Arc sin $\frac{x}{y}$ nie eine convergirende Reihe $A x^{\alpha} y^{\beta} + B x^{\gamma} y^{\delta} + C x^{\varepsilon} y^{\zeta}$ u. s. w. sobald x größer ist als y, weil alsdann $\frac{x}{y} > 1$ seyn würde, und ein Bogen dessen Sinus $\frac{x}{y} > 1$ ist, eine Absurdität in sich faßt d. h. man mag durch irgend eine Rechnungsoperation, welche bey zwey veränderlichen Grössen x und y immer unter der Form $A x^{\alpha} y^{\beta} + B x^{\gamma} y^{\delta}$ u. s. w. enthalten seyn muß, die Grössen x und y, wie man will, unter einander combiniren, so wird für einen solchen Bogen dessen Sinus $\frac{x}{y} > 1$ ist, nie ein angenäherter Werth herauskommen können. Die Reihe $A x^{\alpha} y^{\beta} + B x^{\gamma} y^{\delta} \ldots$ wird also auch selbst in diesem Falle die Absurdität von Arc sin $\frac{x}{y}$ wenn $x > y$ ist, ausdrücken.

§. IX.

Aus der Lehre von den unmöglichen Grössen oder vielmehr imaginären Ausdrücken, z. B. $a + b\sqrt{-1}$; $c + d\sqrt{-1}$ u. d. gl. auf welche man unter andern bey der Auflösung der Gleichungen gelangt, setze ich als bekannt voraus, daß gewisse Combinationen solcher Ausdrücke dennoch auf reelle oder mögliche Resultate führen, wenn diese Combinationen so beschaffen sind, daß die imaginären Formen sich gegenseitig aufheben. Es kann also seyn, daß eine Function zwischen veränderlichen Grössen, solche imaginäre Formen in sich faßt, und bey gehöriger Entwickelung dennoch eine reelle und mögliche Bedeutung hat. Eine Function z. B. von der imaginären Form

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1 - x\sqrt{-1}}{1 + x\sqrt{-1}}$$

ist nichts weniger als etwas Absurdes, wie wir in der Folge sehen werden. Aber es ist oft für manche Folgerungen wichtig, statt des reellen Ausdrucks, den diese Function bezeichnet, ihre imaginäre Form zu gebrauchen.

§. X.

1. Wenn eine Bruchfunction von der Form

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots + fx + g}{\mathfrak{a}x^m + \mathfrak{b}x^{m-1} + \mathfrak{c}x^{m-2} \ldots + \mathfrak{f}x + \mathfrak{g}}$$

vor:

vorgegeben ist, und es ist n < m, so läßt sich diese Function allemahl in so viel einfache Brüche von der Form

$$\frac{A}{\alpha + \beta x} + \frac{B}{\gamma + \delta x} + \frac{C}{\varepsilon + \zeta x} \text{ u. s. w.}$$

zerlegen, als so viele Einheiten der höchste Exponent m im Nenner jener Bruchfunction enthält, wobey denn $\alpha + \beta x$; $\gamma + \delta x$; $\varepsilon + \zeta x$ u. s. w. die einfachen Factoren bezeichnen, in welche sich die Function $ax^m + bx^{m-1} \ldots fx + g$ zerlegen läßt, und welche Factoren man bekanntlich erhält, wenn man diese Function als Gleichung

$$ax^m + bx^{m-1} \ldots + fx + g = 0$$

ansetzt, und die Wurzeln dieser Gleichung sucht, welches ich alles aus der Lehre von den Gleichungen als bekannt voraussetzen muß.

2. Die Möglichkeit jener Zerlegung in einfache Brüche, wird durch ein Beyspiel hinlänglich klar werden.

Gesetzt es sey die Bruchfunction

$$\frac{ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

vorgegeben, deren Nenner $ax^2 + bx + c$ aus der Multiplication der beyden einfachen Factoren $\beta x + \alpha$ und $\delta x + \gamma$ entstehe.

3.

3. Man setze demnach

$$\frac{ax + b}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{\beta x + \alpha} + \frac{B}{\delta x + \gamma}$$

so wird, wenn man die Brüche rechter Hand des Gleichheitszeichens unter einerley Benennung bringt, und hierauf in der Gleichung den gemeinschaftlichen Nenner $ax^2 + bx + c = (\beta x + \alpha)(\delta x + \gamma)$ wegläßt

$$ax + b = A(\delta x + \gamma) + B(\beta x + \alpha)$$
$$= (A\delta + B\beta)x + A\gamma + B\alpha.$$

Da nun diese Ausdrücke für jeden Werth von x mit einander übereinstimmen müssen, so erhält man die Gleichungen

$$a = A\delta + B\beta$$
$$b = A\gamma + B\alpha$$

woraus $A = \frac{a\alpha - b\beta}{\alpha\delta - \gamma\beta}$; $B = \frac{b\delta - a\gamma}{\alpha\delta - \gamma\beta}$

mithin die Zähler der einfachen Brüche gefunden sind.

4. Fehlen in dem Zähler der vorgegebenen Bruchfunction einige Glieder, so muß man sich vorstellen, daß sie vorhanden sind, aber o zu ihren Coefficienten haben. Z. B. fehlte das Glied ax, so müßte man $a = o$; also auch $A\delta + B\beta = o$ setzen. Fehlte das Glied b; so

so müßte man auch in den gefundenen Werthen von A und B, dies $b = 0$ setzen u. s. w.

§. XI.

1. Das bisherige setzt voraus, daß der Nenner $ax^2 + bx + c$ aus zwey von einander verschiedenen Factoren zusammengesetzt sey. Wären aber die beyden Factores einander gleich, also $\beta = \alpha = \delta = \gamma$ mithin $ax^2 + bx + c = (\beta x + \alpha)^2$, so würden die Werthe von A und B in diesem Falle unendlich, weil $\alpha\gamma - \delta\beta = 0$ wird, wenn $\beta = \alpha = \delta = \gamma$, welches anzeigt, daß in solchem Falle keine Zerlegung des Bruchs

$$\frac{ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

in einfache von der angegebenen Form statt finden kann.

2. Die wahre Bedeutung würde eigentlich diese seyn. Wenn $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, so wird $A = \frac{(a - b)\alpha}{0}$; und $B = \frac{(b - a)\alpha}{0}$; also A und B zwar beyde unendlich, aber zugleich $B = - A$. Also wäre jetzt eigentlich der Bruch

$$\frac{ax+b}{ax^2+bx+c} = \frac{(a-b)\alpha}{0.\alpha(x+1)} + \frac{(b-a)\alpha}{0.\alpha(x+1)}$$

$$= \frac{a-b}{(1+x)0} - \frac{(a-b)}{(1+x)0}.$$

dem Unterschiede zweyer unendlichen Grössen gleich, welches immer einer endlichen Grösse, nemlich der vorgegebenen Bruchfunction $\frac{ax+b}{ax^2+bx+c}$ gleich seyn kann, weil man zu einer unendlichen Grösse sich immer endliche von jedem Werthe hinzugesetzt gedenken kann, ohne daß dadurch das Unendliche als verändert angesehen wird. Doch dieses wird bey der nähern Betrachtung des Unendlichen in den ersten §§en dieses Buches noch deutlicher werden. So viel erhellet aber, daß wenn ax^2+bx+c aus zwey gleichen Factoren besteht, die einfachen Brüche unter der Form, wie sie eben gefunden worden sind, nicht gebraucht werden können.

§. XII.

1. Aber die Bruchfunction

$$\frac{ax+b}{ax^2+bx+c}$$

läßt sich in diesem Falle in ein paar andere von der Form $\frac{A}{(\beta x+\alpha)^2} + \frac{B}{\beta x+\alpha}$ verwandeln,

deln, so daß in keinem Zähler dieser Brüche die veränderliche Grösse x vorkömmt, welches in der Folge für die Integralrechnung von erheblichen Vortheil ist.

2. Setzt man nemlich jetzt

$$\frac{ax + b}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{(\beta x + \alpha)^2} + \frac{B}{\beta x + \alpha}$$

so erhält man, wenn die Brüche rechter Hand des Gleichheitszeichens unter den gemeinschaftlichen Nenner $(\alpha + \beta x)^2$ gebracht werden

$$ax + b = A + B(\beta x + \alpha)$$

nach Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners

$$ax^2 + bx + c = (\beta x + \alpha)^2.$$

Mithin $ax + b = B\beta x + A + B\alpha$; folglich

$$a = B\beta$$
$$b = A + B\alpha$$

woraus denn $B = \frac{a}{\beta}$ und $A = \frac{b\beta - a\alpha}{\beta}$

daher $\frac{ax + b}{ax^2 + bx + c}$ oder für gegenwärtigen Fall

$$\frac{ax + b}{(\beta x + \alpha)^2} = \frac{b\beta - a\alpha}{\beta(\beta x + \alpha)^2} + \frac{a}{\beta(\beta x + \alpha)}$$

wird.

§. XIII.

Das in dem Beyspiel (§. X.) angewandte Verfahren läßt sich, wie nach einiger Ueberlegung klar ist, auf so viel Factoren, als auch der Nenner der vorgegebenen Bruchfunction enthalten mag, anwenden. Bringt man alle daraus formirten einfachen Brüche unter einerley Nenner, und addirt die Zähler zusammen, nachdem man die Producte woraus sie bestehen einzeln entwikkelt hat, so erhält man zur Summe allemahl eine Function von x, welche um einen Grad niedriger ist, als der gefundene gemeinschaftliche Nenner, welcher auch demjenigen der vorgegebenen Bruchfunction gleich ist, weil er aus dem Product ihrer einfachen Factoren besteht. Die Vergleichung des gefundenen Zählers mit demjenigen der vorgegebenen Bruchfunction, d. h. die Gleichsetzung derjenigen Coefficienten, welche in beyden Zählern zu einerley Potenz von x gehören, wird alsdann wie in dem Beyspiele (§. X.) die einzelnen Gleichungen geben, aus denen man die Werthe der angenommenen Grössen A, B, C u. s. w. bestimmen kann, vorausgesetzt, daß alle Factoren des Nenners der vorgegebenen Bruchfunction von einander unterschieden sind, weil bey gleichen Factoren, Unbequemlichkeiten wie in (§. XI.) entstehen würden.

In=

Indessen würde nach diesem Verfahren doch immer eine etwas beschwerliche Rechnung entstehen, jene Werthe von A, B, C ꝛc. aus den dafür gefundenen Gleichungen zu entwickeln. Wir werden unten in der Differenzialrechnung ein leichteres Verfahren angeben. Aber das bisherige zeigt denn doch die Möglichkeit, eine solche vorgegebene Bruchfunction wie (§. X.) in einfache Brüche zu zerlegen, und diese wird bey dem Verfahren in der Differenzialrechnung als bewiesen vorausgesetzt.

§. XIV.

Enthält der Nenner der vorgegebenen Bruchfunction eine gewisse Anzahl gleicher Factoren, wäre z. E.

$ax^m + bx^{m-1} \ldots + fx + g = S(\alpha + \beta x)^4$,

so daß dieser Nenner, (ich will ihn der Kürze halber mit N bezeichnen) aus einer gewissen Anzahl ungleicher Factoren, deren Product der Function S gleich sey, und aus 4 gleichen Factoren $= \alpha + \beta x$ deren Product die vierte Potenz von $\alpha + \beta x$ gebe, bestände, so erhält man aus den ungleichen Factoren von S einfache Brüche von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{\gamma + \delta x}$; $\frac{\mathfrak{B}}{\varepsilon + \zeta x}$, u. s. w.

Aber aus den 4 gleichen Factoren 4 Brüche von der Form

$$\frac{A}{(\alpha+\beta x)^4}+\frac{B}{(\alpha+\beta x)^3}+\frac{C}{(\alpha+\beta x)^2}+\frac{D}{\alpha+\beta x}$$

oder vielmehr wenn $\frac{M}{N}$ die vorgegebene Bruchfunction (§. X.) bezeichnet, so wird seyn

$$\frac{M}{N}=\frac{P}{S}+\frac{A}{(\alpha+\beta x)^4}+\frac{B}{(\alpha+\beta x)^3}+\ldots\frac{D}{\alpha+\beta x}$$

wo $\frac{P}{S}$ den Bruch bedeutet, welcher der Summe

von den einfachen $\frac{\mathfrak{A}}{\gamma+\delta x}$; $\frac{\mathfrak{B}}{\varepsilon+\zeta x}$

u. s. w. welche aus den ungleichen Factoren von S entstehen würden, gleich wäre.

Man wird nemlich finden, daß wenn man sich statt $\frac{P}{S}$ alle die einfachen Brüche

$$\frac{\mathfrak{A}}{\gamma+\delta x}+\frac{\mathfrak{B}}{\varepsilon+\zeta x}\ldots\ldots$$

hingeschrieben gedenkt, und man sie mit den übrigen $\frac{A}{(\alpha+\beta x)^4}+\frac{B}{(\alpha+\beta x)^3}\ldots\ldots$ unter einen gemeinschaftlichen Nenner bringt, die Zähler hierauf gehörig entwickelt, nnd zusammen-

ad-

addirt, zur Summe allemahl eine Function von x herauskommen wird, welche mit dem Zähler M der vorgegebenen Bruchfunction verglichen, so viel Gleichungen für die Bestimmung der Grössen 𝔄, 𝔅 . . . A, B . . . darbieten wird, als ihrer der Zahl nach selbst vorhanden sind. Aber es würde ebenfalls etwas mühsam seyn dies Verfahren anzuwenden, um die gedachten Werthe von 𝔄, 𝔅 . . . A, B . . . zu entwickeln, und da die Differenzialrechnung ein leichteres darbietet, so übergehn wir jenes. Aber es war doch nöthig im Allgemeinen die Möglichkeit der Zerlegung der vorgegebenen Bruchfunction $\frac{M}{N}$ in solche einfachere Brüche zu zeigen, welche denn auch nach einigen Nachdenken, nicht schwer zu übersehen ist.

§. XV.

Wenn die Gleichung (§. X.) nemlich

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + fx + g = 0$$

unmögliche Wurzeln, mithin der Nenner N der vorgegebenen Bruchfunction $\frac{M}{N}$ imaginäre oder unmögliche Factoren hat, so sey z. B. $\beta x + \mu + \nu\sqrt{-1}$ ein solcher Factor. Dann

muß

muß, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt, ist auch $\beta x + \mu - \nu\sqrt{-1}$ ein Factor jenes Nenners seyn, aus welchen beyden zusammengehörigen Factoren sich denn die Brüche

$$\frac{A}{\beta x + \mu + \nu\sqrt{-1}} + \frac{B}{\beta x + \mu - \nu\sqrt{-1}}$$

ergeben.

Addirt man beyde zusammen, so erhält man einen Bruch, dessen Nenner dem Product jener beyden imaginären Factoren gleich ist. Dieses Product findet sich

$$= \beta^2 x^2 + 2\beta\mu x + \mu^2 + \nu^2$$

ganz ohne imaginäre Form. Da es in Beziehung auf x von der zweyten Dimension ist, so wird es ein quadratischer Factor, auch wohl ein dreytheiligter oder Trinomialfactor, genannt, in so fern man das Glied $\mu^2 + \nu^2$ als in x^0 multiplicirt, und also jenes Product als aus 3 Gliedern bestehend ansehen kann. So viel paare zusammengehöriger imaginärer Factoren der Nenner N hat, so viel quadratische Factoren ergeben sich daraus.

§. XVI.

1. Man kann einen einfachen Factor wie $\beta x + \mu + \nu\sqrt{-1}$ auch ausdrücken durch

βx

$\beta x + \mu (1 + \frac{\nu}{\mu} \sqrt{-1})$. Was nun auch ν und μ für Zahlen seyn mögen, so kann man $\frac{\nu}{\mu}$ immer als Tangente eines gewissen Winkels φ betrachten. Man setze also $\frac{\nu}{\mu} = \text{tang}\,\varphi$, so wird jener einfache Factor $= \beta x + \mu (1 + \text{tang}\,\varphi \sqrt{-1})$ $= \beta x + \frac{\mu}{\cos\varphi} (\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})$.

2. Man setze der Kürze halber $\frac{\mu}{\cos\varphi} = \lambda$ also $\mu = \lambda \cos\varphi$; dann wird die Form des einfachen Factors $= \beta x + \lambda (\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1})$ und eben so des andern einfachen Factors $= \beta x + \lambda (\cos\varphi - \sin\varphi \sqrt{-1})$. Aus beyden entsteht demnach ein quadratischer Factor von der Form $\beta^2 x^2 + 2 \lambda \beta x \cos\varphi + \lambda^2$.

3. Umgekehrt wird also jeder quadratischer Factor dieser Form, auch wieder in zwey einfache Factoren von der angeführten imaginären Form zerfallen.

Wäre z. B. $4x^2 + 3x + 1$ ein quadratischer Factor des Nenners N, so ist $\beta^2 = 4$; $2\lambda\beta \cos\varphi = 3$; $\lambda^2 = 1$. Hieraus $\lambda = 1$;

$\beta = 2$

$\beta = 2$, mithin

$$\cos\varphi = \frac{3}{4};\ \sin\varphi = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4};$$

und die beyden einfachen Factores würden seyn

$$2x + \frac{3+\sqrt{-7}}{4};\ 2x + \frac{3-\sqrt{-7}}{4};$$

zugleich ersieht man daß die angegebene Function $4x^2 + 3x + 1$ würklich unter der obigen Form des quadratischen Factors, welcher in zwey imaginäre zerfällt, enthalten ist, weil für $\cos\varphi$ ein eigentlicher Bruch herauskam. Wäre dies aber nicht der Fall, erhielte man für $\cos\varphi$ einen uneigentlichen Bruch, so zeigt dies an, daß der vorgegebene Factor nicht in einfache imaginäre zerlegt werden kann, sondern aus zwey einfachen möglichen zusammengesetzt ist. Um solche zu erhalten, betrachtet man in diesem Falle das $\cos\varphi$ nicht als den würklichen Cosinus eines gewissen Winkels, sondern bloß als ein Zeichen für eine gewisse Grösse, aus der sich aber eine andere mit $\sin\varphi$ bezeichnete imaginäre $\sqrt{(1 - \cos\varphi^2)}$ finden würde, welche denn mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, für den Ausdruck $\sin\varphi\sqrt{-1}$ (1) etwas mögliches giebt, so daß dadurch obige beyde imaginäre Factoren (2) würklich in zwey einfache mögliche übergehn, aus denen in sol-

solchem Falle der quadratische Factor zusammengesetzt ist.

4. Es sey z. B. der vorgegebene quadratische Factor $= 4x^2 + 9x + 1$; so ist $\beta^2 = 4$ $2\lambda\beta \cos\varphi = 9$; $\lambda^2 = 1$; also wieder wie vorhin (2) $\beta = 2$; $\lambda = 1$; also $4 \cos\varphi = 9$; und $\cos\varphi = \frac{9}{4}$ also > 1; daher hier die Grösse $\frac{9}{4}$ nur mit $\cos\varphi$ bezeichnet ist, und keinen würklichen Cosinus bedeuten kann. Man kann aber dies Zeichen $\cos\varphi$ für die gefundene Grösse $\frac{9}{4}$ stehen lassen, so wie man dafür auch sonst nur einen Buchstaben setzen könnte, und findet daraus alsdann eine andere mit $\sin\varphi$ bezeichnete imaginäre Grösse $= \sqrt{(1 - \cos\varphi^2)} =$ $\sqrt{(1 - \frac{81}{16})} = \frac{\sqrt{-65}}{4} = \frac{\sqrt{65}}{4}\sqrt{-1}$.

5. Substituirt man hierauf die für β, λ, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ gefundenen Werthe in den Ausdruck $\beta x + \lambda(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$ so erhält man wegen $\sin\varphi\sqrt{-1} = -\frac{\sqrt{65}}{4}$; die beyden möglichen Factoren

$$2x + \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{65}}{4}; \quad 2x + \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{65}}{4}$$

für den vorgegebenen quadratischen.

Die bisherigen allgemeinen Betrachtungen über die Functionen, habe ich zu bessern Verständnisse des Folgenden hier vorausschicken müssen.

Höhere

Höhere Analysis.

Erster Theil.

Differenzial-Rechnung.

Differenzial-Rechnung.

Vorbegriffe.

§. 1.

I. Da man sich in der Mathematik bloß mit Vergleichungen von Grössen beschäftiget, so nennt man jede Grösse A in Beziehung auf eine andere gleichartige a endlich, wenn sich der Werth von A in Vergleichung von a immer durch eine Zahl angeben läßt, diese Zahl mag nun eine ganze Zahl, ein Bruch oder auch eine Irrationalzahl seyn, in welchem letztern Falle man sich denn von der zur Vergleichung angenommenen Grösse a selbst wieder Theile gedenken muß, unbekümmert ob durch einen solchen Theil $\frac{1}{n}a = \alpha$ die Grösse A völlig genau gemessen, oder wie meistens der Fall ist, nur durch eine Näherung ausgedrückt werden kann.

II.

II. In dem letztern Falle nennt man die Grösse A endlich, wenn sich zwey nächst auf einander folgende vielfache von α angeben lassen, zwischen denen die Grösse A enthalten ist, d. h. wenn man zeigen kann, daß $A > m\alpha$ aber $< (m + 1)\alpha$ ist, was auch m für eine ganze Zahl ist, wenn sie nur angegeben, hingesetzt, oder als bestimmt gedacht werden kann.

III. Je größer die Zahl m ist, desto größer ist A in Vergleichung mit α. Aber jede für m hingeschriebene Zahl, aus so viel Ziffern sie auch bestehen mag, ist endlich, d. h. man kann sich eine Zahl gedenken, welche noch grösser als diese seyn würde.

IV. So wie man in der Geometrie keine Gränze kennt, über welche eine Linie, so lang sie auch seyn mag, nicht noch weiter verlängert werden könnte, so wenig kennt der Verstand auch eine Gränze, über welche eine Zahl (oder Größe überhaupt), so groß als sie auch seyn mag, sich nicht noch weiter vermehren ließe. Eine Zahl kann also größer gedacht werden als jede angebliche, d. h. größer als jede, die auch mit noch so viel Ziffern hingeschrieben oder gedacht werden mag (major dato quovis numero adsigna-

signabili). Man sagt in diesem Falle daß sie unendlich werde.

V. Der Begriff des Unendlichen beruht also bloß auf der denkbaren Möglichkeit des Wachsthums einer Zahl oder Grösse überhaupt, über jede angebliche Gränze hinaus. Aber wir dürfen uns das Unendliche nie als völlig erreicht, als ein völlig bestimmtes, das durch irgend eine Zahl dargestellt werden könnte, gedenken. Man hat daher zur Bezeichnung des Unendlichen das Zeichen ∞ eingeführt, um dem Verstande die Freyheit zu lassen, die Gränze über welche eine Zahl oder Grösse steigt, sich so weit als man will hinauszudenken. Aber jede Gränze die man für ein solches Wachsthum würklich setzt, ist endlich, und bloß darin, daß jede Gränze überschritten, und keine letzte gedacht werden kann, setzen wir den Begriff des Unendlichen, der denn in der höhern Mathematik, als abstracter Begriff eben so gut ohne Anstoß gebraucht werden kann, als viel andere Begriffe, die auch nur in der Abstraction statt finden, und doch den Gegenstand einer ganzen Wissenschaft ausmachen.

VI. So sprechen wir in der Geometrie von einer Linie, ohne an die Fläche zu denken, von

von der sie die Gränze ist; von einer Fläche, ohne uns den Körper vorzustellen, von der diese Fläche wieder die Gränze ist, und ohne welchen weder Fläche, Linie, noch Punkt existiren würde. Wir reden von der unendlichen Verlängerung einer Linie, von einer unendlichen Linie, ohngeachtet sie von uns nur gedacht, nie aber objectiv in ihrer völligen Ausdehnung dargestellt werden kann, und alle Sätze die aus diesen und ähnlichen Abstractionen abgeleitet werden, machen doch den Gegenstand der erhabensten aller Wissenschaften aus.

VII. Man wird in der Mathematik so oft auf die Vorstellung eines über alle Gränzen hinausgehenden Wachsthums einer Grösse geleitet, daß man sich an bloße Spitzfindigkeiten stößt, wenn man sich zur Bezeichnung eines solchen Begriffs nicht des Worts Unendlich bedienen will, und Untersuchungen, die durch den richtigen Begriff des unendlich Grossen, oft ungemein erleichtert und abgekürzt werden, durch Vermeidung dieses Begriffs unnöthiger Weise ein schwerfälliges Ansehen giebt. Ja sehr oft glaubt man bey diesen oder jenen Untersuchungen den Begriff des Unendlichen vermieden zu haben, und versteckt liegt er bey denselben dennoch zum Grunde.

VIII.

VIII. Ueberhaupt gedenken wir uns in der Mathematik das Unendliche nie im Zustande des würklichen Seyns, sondern nur im Zustande des Werdens. Wir sagen nie eine Grösse ist unendlich, sondern sie wird unendlich, d. h. wir gedenken uns, daß keine Gränze vorhanden ist, die sie in ihrem Wachsthum nicht noch übersteigen könnte oder überstiegen hätte, und betrachten Verhältnisse, die zwey Grössen bey immer fortdaurenden Wachsthume derselben haben, als wenn diese Verhältnisse auch über jede angebliche Gränze hinaus, d. h. im Unendlichen selbst statt finden würden.

Es sey z. B.

$m = 1+1+1+1$ ..... ohne Ende fort

und eben so

$p = 2+2+2+2$ ..... ohne Ende

so erhellet, daß zwar jede dieser Zahlreihen für sich ein Unendliches ist, und mit ∞ bezeichnet werden kann; aber gleichviel Zahlen aus jeder einzelnen Reihe, geben Summen, die beständig in dem Verhältnisse $1 : 2$ stehen, z. B.

$$1+1+1+1 : 2+2+2+2 = 1 : 2.$$

Also findet der Verstand darin nichts Ungereimtes, daß jene Summen m und p, auch im Zustande

ihres unendlich fortgesetzten Wachsthums betrachtet, noch immer jenes Verhältniß behalten, oder beständig m : p = 1 : 2 seyn werde, wenn man nur immer gleich viel Zahlen aus jeder Reihe zusammennimmt. Ja es ist nicht der geringste Grund vorhanden, warum bey dem angeführten ohne Ende fortgesetzten Wachsthum von m und p, je ein anderes Verhältniß sollte statt finden können. Und so können demnach zwey Grössen m, p auch wenn sie unendlich werden, dennoch immer in einen gewissen geometrischen Verhältnisse stehen. Es ist also in völliger Strenge wahr, daß

$$\infty . 1 : \infty . 2 = 1 : 2$$

ist, und nur der irrige Begriff von dem würklichen Seyn einer unendlichen Grösse kann den Einwurf veranlassen, daß zwischen Grössen im unendlichen Zustande keine weitere Vergleichung statt finde. Die unendliche Reihe $p = 2 + 2 + 2 \ldots$ will ja weiter nichts sagen, als daß man sich die erstere $m = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ nur zweymahl vorstellet, oder $p = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$

$$+ 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$$

setzen soll, welches denn der Kürze halber durch $2 . \infty$ ausgedrückt wird.

Ist ferner in (I — III) $A = m . \alpha$ oder $\frac{A}{\alpha} = m = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$, und

für

für eine andere mit α gleichartige Grösse B der Bruch oder Quotient $\frac{B}{\alpha} = p = 2 + 2 + 2 + 2 \ldots$, so werden zwar A und B für sich in Vergleichung mit α unendlich groß, aber immer bleibt auch beym unaufhörlichen Wachsthum von m und p, $A : B = 1 : 2$.

IX. Ferner sey z. B. für eine gerade Linie AQ (Fig. I.) welche von einer andern AR in A geschnitten wird, die welchem Punkte M man will zugehörige Abscisse $AP = x$ und Ordinate $PM = y$, so ist beständig $x : y = 1 : \tang A$, auch wenn man den Punkt M so weit man will hinaussetzt, mithin die zusammengehörigen x und y über alle Gränzen hinauswachsen läßt, d. h. sie im Zustande ihres Unendlichwerdens betrachtet, und würde jenes Verhältniß $1 : \tang A$ nicht ohne Ende hinaus statt finden, so würden nicht alle möglichen oder gedenkbaren Punkte M in der geraden Linie AQ bleiben, wie doch vorausgesetzt wird. Es kann also nie, auch bey der unendlichen Verlängerung der Linie AQ, ein anderes als das angegebene Verhältniß statt finden.

So kann man sich den ins Unendliche fortlaufenden Flächenraum zwischen den beyden Schen-

keln eines Winkels bad (Fig. II) gedenken. Ist nun der Winkel cad = 2.bad, und gedenkt man sich auch den Flächenraum cad ohne Ende fort, so bleibt nicht der geringste Zweifel, daß auch bey diesen unendlich fortlaufenden Winkelflächen noch immer das Verhältniß 2:1 statt finden werde.

X. Wenn wir demnach unter dem Zeichen ∞ eine Zahl verstehen, welche über alle angeblichen Gränzen hinausgeht, ohne je eine letzte zu erreichen, eine Zahl also, welche immer wächst, immer grösser wird, ohne je eine Gröste zu seyn, so kann sie in diesem Zustande des Unendlichwerdens, dennoch beständig in einem angeblichen Verhältnisse zu einer ähnlichen unendlich werdenden stehen, und der Verstand wird Sätze, welche aus einer solchen Abstraction abgeleitet worden, für eben so wahr halten müssen, als die Sätze, die der Geometer von Linien beweißt, wenn gleich eine Linie für sich allein nur immer in der blossen Abstraction bestehet, und nie in der Würklichkeit für sich allein dargestellt werden kann (IV).

XI. Man gedenke sich ferner durch A (Fig. 1.) eine andere gerade Linie AW ohne Ende fortgezogen, aber unter einem größern spitzigen Winkel gegen

AR,

AR, als die vorige AQ, und der Winkel den sie mit AR macht, heiße B. Wird nun für dieselbe Abscisse x die Ordinate PL mit z bezeichnet, so ist beständig x: z = 1: tang B, so weit man auch den Punkt L sich hinausgedenken mag. Demnach beständig y: z = tang A: tang B, d. h. z immerfort größer als y (IX), auch wenn man beyde im Zustande des Unendlichwerdens betrachtet. Nie kann y = z werden, weil sonst die gerade Linie AW ohne Ende verlängert, noch einmahl die erstere AQ würde durchschneiden können. Wollten wir nicht annehmen, daß Grössen wie y, z im Zustande ihres Unendlichwerdens nicht noch gewisse Verhältnisse gegen einander haben könnten, sondern vielmehr in absoluter Gleichheit stehen müsten, so würden daraus die grösten Absurditäten folgen.

XII. Es hindert nichts sich eine unendliche Reihe wie $m = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$, so viel mahl als man will, d. h. auch unendliche mahle hingeschrieben zu gedenken, z. B.

$^{A}1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$ ohne Ende ^{C}
$+ 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$ ohne Ende
$+ 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$
$+ 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
^{B}ohne Ende.

Das Aggregat von allen würde auch ein Unendliches seyn, aber ein Unendliches gleichsam von einer höhern Ordnung oder Dimension, als jedes einzelne in jeder Horizontal- oder Verticalreihe hingesetzte Unendliche. So lange man nur eine endliche Menge von Einheiten in jeder Vertical- und Horizontalreihe nimmt, wie groß man sich auch diese Menge $= x$ gedenken mag, wenn man nur immer gleich viel solcher Einheiten, sich in jeder Reihe AB, AC vorstellt, wird das Aggregat von allen immer durch $x . x = x^2$ ausgedrückt werden müssen. Nimmt man nun x über alle Gränzen, und setzt dafür das Zeichen ∞, so muß das erwähnte unendliche Aggregat nothwendig durch $\infty . \infty$ oder ∞^2 ausgedrückt werden; würde man sich statt der Einer lauter Zweyer gedenken, so würde das Aggregat

gat durch $4 \cdot \infty^2$ ausgedrückt werden müssen u. s. w. An welchen Bezeichnungen sich der Verstand nicht stossen wird, wenn man die richtigen Ideen damit verknüpft.

XIII. Für jedes endliche x würde immer $x^2 : x = x : 1$ seyn, also auch wenn man x über alle Gränzen sich wachsend gedenkt, d. h. x durch ∞ ausdrückt, wird $\infty^2 : \infty = \infty : 1$ seyn.

Es hat also das höhere Unendliche zu dem niedrigern, ein Verhältniß, dessen erstes Glied man sich gleichfalls über alle angeblichen Gränzen hinauswachsend gedenken muß.

XIV. Zufolge der angegebenen Vorstellung, wird man keinen Anstand finden, sich auch ein Unendliches von der dritten Ordnung, z. B. ∞^3, und so mehrere von höhern Ordnungen ∞^4, ∞^5 u. s. w. mit ihren Verhältnissen zu gedenken.

XV. Wenn man von einer unendlichen Reihe wie

$$m = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$$

jede endliche Menge von Einheiten, womit man die Reihe zu schreiben angefangen hat, wegläßt, so ändert man nur den terminum a quo, von wel-

welchem man die Reihe anfängt hinzuschreiben, der Werth der Reihe selbst, d. h. das Unendliche, wird dadurch im geringsten nicht geändert. Jede vorne weggelassene endliche Menge von Einheiten wird gleichsam der Unendlichen hinten immer wieder in der Abstraction zugesetzt, eben weil sie die immer fortwachsende ist, und in ihrem Wachsthum kein Ende hat. Eben so bleibt eine gerade Linie, die man von einem Punkte aus sich ohne Ende fortgezogen gedenkt, immer die unendliche, was für ein endliches Stück man auch von ihrem Anfangspunkte abschneidet, und nur der Anfangspunkt der ohne Ende fortgezogenen Linie wird dadurch geändert.

XVI. Dasselbe würde statt finden, wenn man eine endliche Menge von Einheiten zu der unendlichen m, linker Hand ihres termini a quo noch hinzusetzte. Dies alles heißt mit andern Worten so viel, der Werth einer unendlichen Grösse, oder vielmehr das Unendliche, bleibt völlig ungeändert, ob man eine endliche Grösse hinzusetzt, oder wegnimmt, oder in Zeichen, es ist $\infty \pm a = \infty$, was auch a für einen endlichen Werth hat.

XVII. Ferner erhellt auf dieselbe Weise, daß auch das Aggregat (XII) oder das unendliche der zweyten Ordnung ∞^2 völlig dasselbe bleibt, ob man eine Reihe wie $1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$ horizontal oder vertical davon wegnimmt, oder hinzusetzt. Es werden hier gleichsam auch nur die termini a quo (AC und AB) geändert, von denen man das Aggregat hinzuschreiben anfängt. Da nun $m = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$ das Unendliche der ersten Ordnung bedeutet, so ist beständig $\infty^2 \pm \infty$ so viel als ∞ selbst, oder das Unendliche der höhern Ordnung wird durch dasjenige einer niedrigern im geringsten nicht geändert; so ist auch überhaupt $\infty^2 + \mu . \infty$ immer $= \infty^2$, was auch μ für einen endlichen Factor bezeichnen mag.

XVIII. Auf diese Weise ist allgemein

$$\infty^k + \infty^t \text{; oder auch } \infty^k + \mu . \infty^t$$

immer nur einerley mit mit ∞^k, wofern $k > t$ und μ eine endliche Zahl ist. Oder auch, wenn x erstlich eine endliche Grösse bezeichnet, ist

$$x^k : x^k + \mu x^t = 1 : 1 + \frac{\mu}{x^{k-t}}$$ d. h. das

Verhältniß x^k zu $x^k + \mu x^t$ nähert sich mit dem Wachsthum von x dem Verhältniß der Gleichheit $1 : 1$ ohne Ende immer mehr und mehr,

weil

weil der Bruch $\frac{\mu}{x^{k} - t}$ immer desto kleiner wird, je größer man x sich gedenkt. Läßt man x über jede angebliche Gränze wachsen, d. h. setzt man $x = \infty$ so nähert sich $\infty^{k} : \infty^{k} + \mu \infty^{t}$ ohne Ende dem Verhältniß 1 : 1, d. h. wenn x un- unendlich ($= \infty$) wird, ist auch $\infty^{k} = \infty^{k} + \mu \infty^{t}$, wofern $k > t$.

So bald man den richtigen Begriff des Unendlichen hat, kann auch die gesuchteste Spitzfindigkeit nichts gegen diese Sätze einwenden. Durch die angeführten figürlichen Darstellungen, die sich nach einigem Nachdenken noch leicht erweitern lassen, werden die anfangs etwas befremdenden Vorstellungen vom Unendlichen verschiedener Ordnungen, alles Geheimnißvolle verliehren.

XIX. So wie der Verstand dem Wachsthum einer Grösse keine Gränzen setzt, und auf diese Weise zu dem Begriff einer unendlichen Grösse, oder vielmehr des unendlich Grossen gelangt, so kann man auch umgekehrt eine Grösse immer kleiner und kleiner werden lassen, ohne daß man dieser Abnahme je ein Ende setzte. Gedenkt man sich eine Grösse in einem solchen Zustande der unendlichen Abnahme, so sagt man daß sie un-

unendlich klein werde, aber nie kann man sagen daß sie unendlich klein sey, weil dies so viel hieße, als eine Gränze setzen, über die sie nicht noch kleiner werden könnte.

XX. Zwar könnte man sagen, Null oder Nichts sey die Gränze bey immerwährender Abnahme oder das unendlich Kleine selbst. Aber dies widerspricht dem festgesetzten Begriff, daß die Grösse ohne Ende abnehme, daß sie immer kleiner werde, daß immer noch etwas von ihr vorhanden seyn soll, so weit man sich auch die Verminderung derselben gedenken will, und daß dies Vorhandene noch immer soll kleiner werden können.

Die Möglichkeit einer solchen unendlichen Abnahme, ohne je Null zu werden, kennt man ja schon aus der gemeinen Arithmetik, z. B. bey der Bruchreihe

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \ldots\ldots\ldots$$

oder allgemein

$$1 \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n^3} \quad \frac{1}{n^4} \quad \ldots\ldots\ldots$$

wie weit man auch hier die fortgesetzte Eintheilung der Einheit sich hinausgedenkt, so werden wir nie

auf

einen Bruch oder auf ein Stück der Einheit kommen, welches völlig = o wäre, d. h. die Null ist nicht das über alle Gränzen Kleine, das unendlich Kleine. Die Null oder das Nichts kann weder eine Grösse, noch eine unendlich kleine Grösse genannt werden.

XXI. Zwar können wir eine Grösse, durch beständige Subtraction eines aliquoten Theiles derselben vermindern, daß Nichts mehr von ihr übrig bleibt, daß sie verschwindet (evanescit), aber das heißt nicht eine Grösse ohne Ende vermindern, oder sie unendlich klein werden lassen. Dadurch daß man diese Begriffe nicht sorgfältig von einander unterschieden hat, sind in der Analysis des Unendlichen, die größten Absurditäten entstanden, z. B. daß Nullen oder Nichtse, wie würkliche Grössen, noch ein Verhältniß gegen einander haben können u. dgl., und man hat sogar die ganze Differenzialrechnung auf eine solche Nullenrechnung gebracht, und dadurch das Princip derselben, mit Ungereimtheiten und Schwürigkeiten überhäuft.

XXII. Soll eine Grösse unendlich klein werden, so darf man sie nicht dergestalt abnehmen lassen, daß sie endlich Null wird (also durch Subtraction),

traction), weil man sie ja nach dieser Weise noch weiter vermindern, und gar in den negativen Zustand übergehen lassen könnte, sondern die Verminderung muß so beschaffen seyn, daß die Grösse wenn sie auch immerfort abnimmt, doch nie den völligen Nullzustand erreicht. Dann hat man den wahren Begriff des ohne alle Ende Kleinen, des unendlich Kleinen, welches man sich gleichfalls nie im Zustande des würklichen Seyns, d. h. als völlig erreicht, sondern auch immer nur im Zustande des Werdens gedenken muß.

So sagen wir also daß in der Reihe (XX) die Brüche immer kleiner und kleiner werden, daß sie über alle Gränzen klein, unendlich klein werden, aber nie läßt sich einer angeben, der würklich der Kleinste wäre, und dies verlangt man auch bey keiner Untersuchung, auf welche man durch die Betrachtung einer unaufhörlich über alle Gränze hinausgehenden Abnahme einer Grösse geleitet wird.

XXIII. Wenn A eine Grösse welche man will, und m eine Zahl so groß man will bedeutet, so bezeichnet der Ausdruck $\frac{A}{m}$ immer ein bestimmtes Stück der Grösse A, aber ein immer kleineres

je

je grösser man sich die Zahl m gedenkt. Wächst m über alle Gränzen, so nimmt das Stück $\frac{A}{m}$ über alle Gränzen ab, es wird ohne Ende oder unendlich klein, wenn man m sich unendlich groß gedenkt; aber nie wird es völlig $= 0$. Wird demnach eine unendlich große Zahl mit ∞ bezeichnet, so wird der Ausdruck $\frac{A}{\infty}$ einen unendlich kleinen Theil der Grösse A bezeichnen, der also nur in der Abstraction gedacht, aber nie würklich dargestellt werden kann, was man auch für das Zeichen ∞ für eine Zahl hinsetzen mag. Bey den Bruchreihen (XX) würde A eine Zahl $= 1$, und m eine über alle Gränzen hinausgehende Potenz der Zahl 2 oder n bezeichnen.

XXIV. Daß unendlich kleine Grössen, nach den bisherigen Begriffen, in einem angeblichen geometrischen Verhältnisse stehen können, wird man so wenig bezweifeln, als es oben von dem unendlich Grossen erwiesen worden ist. Man gedenke sich z. B. die beyden Reihen

$$M = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots \text{ohne Ende fort}$$

$$N = 1;\ \frac{2}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{2}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots$$

So

so wird jedes Glied der Reihe N zu dem darüberstehenden der Reihe M, immer in dem Verhältnisse 2 : 1 stehen, wenn man auch beyde Reihen ohne Ende fortsetzt, d. h. die Glieder derselben ohne Ende klein werden läßt. Da die Nenner der Brüche in beyden Reihen Potenzen der Zwey sind, so ist der allgemeine Ausdruck für den unendlich Kleinen in der Reihe $M = \frac{1}{2^\infty}$, und für den darunter stehenden in der Reihe $N = \frac{2}{2^\infty}$; beyde werden für sich ohne Ende klein, aber immer stehen sie in dem Verhältnisse 1 : 2.

XXV. So wie wir im Vorhergehenden auf den Begriff des unendlich Grossen verschiedener Ordnungen geleitet worden sind, so können wir uns in der Abstraction auch unendlich Kleine von verschiedenen Ordnungen gedenken, welche man denn auf folgende Weise bezeichnen kann

$$\frac{1}{\infty};\ \frac{1}{\infty^2};\ \frac{1}{\infty^3}\ \text{u. s. w.}$$

So wie nemlich ∞^2 als unendlich gegen ∞ betrachtet wird, so wird dagegen $\frac{1}{\infty^2}$ immer als unendlich klein in Vergleichung mit $\frac{1}{\infty}$ angesehen wer-

werden müssen. Völlig wie nemlich $\infty^2 : \infty = \infty : 1$, so verhält sich auch

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = 1 : \frac{1}{\infty} = \infty : 1$$

Ueberhaupt

$$\frac{1}{\infty^k} : \frac{1}{\infty^t} = \infty^t : \infty^k = 1 : \infty^{k-t}$$

Ist demnach $k > t$, so ist immer $\frac{1}{\infty^k}$ als unendlich klein gegen $\frac{1}{\infty^t}$ zu betrachten, und $\frac{1}{\infty^t}$ wird nicht geändert, wenn man ein unendlich Kleines von einer höhern Ordnung dazu setzt, oder davon abzieht.

XXVI. Zu fernerer Erläuterung des unendlich Grossen und unendlich Kleinen, und der verschiedenen Ordnungen derselben, ist zu bemerken, daß man zugleich auf die ursprünglichen Formen Rücksicht nehmen muß, in welchen man die Grössen, als noch im endlichen Zustand existirend, betrachtete, und welche Formen man nicht vernachlässigen darf, wenn man einen richtigen Begriff sowohl von dem Unendlichen, als auch den verschiedenen Ordnungen und Verhältnissen desselben erhalten will.

Es

Es ist kein Zweifel, daß Ausdrücke wie ∞; ∞^2; ∞^m; a^∞; $\log \infty$ absolut genommen, lauter in den unendlichen Zustand übergehende Grössen bezeichnen, aber in den Formen, wie sie hier gegeben sind, und überall in der Mathematik vorkommen können, sobald man in den ähnlichen Ausdrücken endlicher Form x, x^2, x^m, a^x; $\log x$ die Grösse x ohne Ende wachsen läßt, bezeichnen jene Ausdrücke, Unendliche von sehr unterschiedenen Ordnungen, deren Verhältnisse aus jenen Formen selbst abgeleitet werden können. Einige Beyspiele werden dies erläutern.

1stes Beyspiel. Es seyen in zwey krummen Linien, für einerley Abscisse x die Ordinaten

$$y = \frac{x^3}{a^2}$$

$$z = \frac{x^2}{b}$$

wo a, b gewisse unveränderliche Linien bezeichnen, so wachsen zwar y und z, unaufhörlich mit x, beyde werden unendlich, so wie x unendlich wird, aber je mehr sich y und z dem unendlichen Zustande nähern, desto mehr wächst y in Vergleichung mit z, und wird unendlich groß gegen z, wenn beyde selbst unendlich werden. Denn im-

mer ist $y:z = bx:a^2$, also für $x = \infty$, wird $y:z = b.\infty : a^2$, demnach y ein Unendliches gegen z, und z also von einer niedrigern Ordnung als y.

2tes Beyspiel. Wäre für eine dritte krumme Linie die Ordinate $w = b.2^{\frac{x}{c}}$, wo b und c wieder unveränderliche Linien bezeichnen, so ist für $x = \infty$ zwar auch $w = \infty$, aber von einer höhern Ordnung als y (1. Beysp.) Denn verwandelt man die Exponentialgrösse $2^{\frac{x}{c}}$ oder $(1+1)^{\frac{x}{c}}$ nach dem binomischen Lehrsatz in eine unendliche Reihe

$$1 + \frac{x}{c} + \frac{x(x-c)}{1.2.c^2} + \frac{x(x-c)(x-2c)}{1.2.3.c^3}$$

so wird solche für den Fall, daß x unendlich wird =

$$\frac{x}{c} + \frac{x^2}{1.2\,c^2} + \frac{x^3}{1.2.3.c^3} \ldots$$

weil vorne die 1 als eine endliche Grösse weggelassen, und statt $x - c$, $x - 2c$ rc. bloß x gesetzt werden kann (XVI.). Also ist für $x = \infty$

$w = b$

$$w = b\left(\frac{x}{c} + \frac{x^2}{1.2c^2} + \frac{x^3}{1.2.3c^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.c^4}\right)$$

$$y : w = x^3 : a^2 b\left(\frac{x}{c} + \frac{x^2}{1.2c^2} + \frac{x^3}{1.2.3c^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.c^4} \dots\right)$$

oder

$$y : w = 1 : \frac{a^2 b}{c.x^2} + \frac{a^2 b}{1.2c^2.x} + \frac{a^2 b}{1.2.3c^3} + \frac{a^2 bx}{1.2.3.4.c^4} \dots$$

Aber die ersten zwey Glieder dieser Reihe, sind wenn x unendlich groß wird, unendlich klein, und das dritte Glied ist eine endliche Grösse, alle 3 können also gegen die folgenden Glieder weggelassen werden, weil solche unendlich groß werden. Also ist w unendlich groß gegen y für den Fall daß beyde unendlich werden. Mithin ist y ein unendliches von einer niedrigern Ordnung als w; und folglich z noch von einer niedrigern Ordnung gegen w als y (Beysp. 1.).

3tes Beyspiel. Es sey wieder für eine andere krumme Linie, die Ordinate $u = f \log \frac{x}{g}$, wo f und g wieder beständige Linien bezeichnen, und $\log \frac{x}{g}$ den natürlichen Logarithmen bedeuten mag.

Nun ist, wie wir in der Folge sehen werden,

$$\frac{x}{g} = 1 + \log\frac{x}{g} + \frac{1}{1.2}\left(\log\frac{x}{g}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\log\frac{x}{g}\right)^3 \ldots$$

Ist also x, und folglich auch $\frac{x}{g}$ unendlich, so kann man die 1 weglassen, und erhält für diesen Fall

$$x = g\log\frac{x}{g}\left(1 + \frac{1}{1.2}\log\frac{x}{g} + \frac{1}{1.2.3}\left(\log\frac{x}{g}\right)^2 \ldots\right)$$

$$x^2 = g^2\left(\log\frac{x}{g}\right)^2\left(1 + \frac{1}{1.2}\log\frac{x}{g} + \frac{1}{1.2.3}\left(\log\frac{x}{g}\right)^2 \ldots\right)^2$$

Demnach das Verhältniß der Ordinaten z und u in beyden krummen Linien (1tes u. 3tes Beysp.), für den Fall daß diese Ordinaten unendlich werden

$$z : u = x^2 : b.f\log\frac{x}{g}$$

Oder statt x^2 den Werth der dafür gefundenen Reihe substituirt

$$z : u = g^2\log\frac{x}{g}\left(1 + \frac{1}{1.2}\log\frac{x}{g} \ldots\right)^2 : bf$$

Also wird z nnendlich gegen u; oder die unendliche Ordinate u für $x = \infty$, ist ein Unendliches von einer niedrigern Ordnung, als die Ordinate z.

XXVII. Wenn demnach die Ordinaten y, z, w, u, in den erwähnten krummen Linien unend-

endlich werden, so ist $w = b \cdot 2^{\frac{x}{c}}$ ein Unendliches von einer höhern Ordnung als $y = \frac{x^3}{a^2}$, und noch von einer höhern, als $z = \frac{x^2}{b}$, endlich noch von einer höhern, als $u = f \log \frac{x}{g}$. Woraus denn weiter folgt, daß wenn man statt der Linien sich Zahlen gedenkt, und z. B. $b = a = f = g = 1$ setzt, die Exponentialgrösse 2^x für den Fall daß $x = \infty$ wird, ein höheres Unendliche als x^3, dieses wieder ein höheres als x^2, und dieses ein höheres als $\log x$ bezeichnen wird.

XXVIII. Hätte man also z. B. einen Ausdruck von der Form

$$S = 2^x + x^3 + x^2 + \log x$$

so wird sich S dem Werthe 2^x ohne Ende immer mehr und mehr nähern, je grösser man x nimmt, und wenn x über jede angebliche Gränze wächst, d. h. unendlich wird, so verschwinden die niedern Unendliche x^3, x^2, $\log x$, gegen das höchste 2^x, und es wird schlechtweg $S = 2^x$.

XXIX.

XXIX. Umgekehrt, wenn die Brüche

$$\frac{1}{2^x};\ \frac{1}{x^3};\ \frac{1}{x^2};\ \frac{1}{\log x}$$

vorgegeben wären, so würden sie zwar, wenn x unendlich groß wird, sämmtlich unendlich klein, aber unter allen, würde $\frac{1}{2^x}$ der unendlich Kleinste, d. h. der unendlich Kleine von der höchsten Ordnung seyn, und in einem Ausdrucke wie

$$T = \frac{1}{\log x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2^x}$$

würde sich T dem Werthe $\frac{1}{\log x}$ ohne Ende immer mehr und mehr nähern, je grösser man x nimmt, und für $x = \infty$, verschwinden die Glieder $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{2^x}$ gegen $\frac{1}{\log x}$, so daß es verstattet ist für diesen Fall bloß

$$T = \frac{1}{\log x}$$

zu setzen.

XXX. Wollte man einwenden, daß so groß man auch x nimmt, doch nie völlig genau

$$T = \frac{1}{\log x}$$

seyn

seyn könne, so wird man doch zugeben müssen, daß je grösser x wird, desto mehr sich auch T dem Werthe von $\frac{1}{\log x}$ nähern müsse, und wenn man für $x = \infty$, $T = \frac{1}{\log x} = \frac{1}{\log \infty}$ setzt, so will man durch das Zeichen $=$ nichts anders als diese unendliche Annäherung bezeichnen. Hätte man in der Analysis ein besonderes Zeichen eingeführt, um eine solche unendliche Annäherung einer Grösse zu einer andern anzudeuten, z. B. etwa das Zeichen $\equiv$, so würde Niemand daran einen Anstoß finden, daß wenn in einer Gleichung wie

$$T = \frac{1}{\log x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2^x}$$

die Grösse x ohne Ende wächst, d. h. unendlich wird

$$T \equiv \frac{1}{\log x}$$

seyn werde, da man hingegen bey der Bezeichnung

$$T = \frac{1}{\log x}$$

sich gewöhnlich den Werth von T als schon erreicht gedenkt, eine Vorstellung, die bey der Betrachtung des unendlich Grossen oder unendlich Kleinen, nur in der Abstraction statt finden kann.

XXXI.

XXXI. Man kann also behaupten, daß wenn in dem für T angegebenen Ausdrucke $x = \infty$ wird, d. h. x sich dem Unendlichen immer mehr und mehr nähert, alsdann in völliger Schärfe auch $T = \frac{1}{\log x}$ d. h. T sich dem Werthe $\frac{1}{\log x}$ ohne Ende immer mehr und mehr nähern werde. Da indessen ein solches Zeichen für die unendliche Annäherung einer Grösse zu einer andern, bis jetzt nicht eingeführt ist, so erinnere ich doch ein für allemahl, daß wenn man für $x = \infty$ den Werth von $T = \frac{1}{\log x}$ setzt, man unter dem Zeichen $=$ bloß eine solche unendliche Annäherung sich gedenken muß.

XXXII. Es verhält sich in dem angegebenen Beyspiele ohngefähr wie in der Arithmetik, wenn man den Bruch $\frac{1}{3} = 0, 33333 \ldots$ setzt, da doch eigentlich das Zeichen $=$ sich nur in der Abstraction rechtfertigt, in so ferne man sich den hingeschriebenen Decimalbruch als völlig erreicht oder vollendet gedenkt, wenn derselbe gleich nie völlig dargestellt werden kann.

Fer-

Ferner setzt man in der Arithmetik die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots\ldots = 1$$

und man weiß, daß diese Bezeichnung doch nichts anders sagen will, als daß sich diese Reihe ohne Ende immer mehr und mehr der 1 nähert.

Wenn demnach in einem Ausdrucke wie

$$T = \frac{1}{\log x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2^x}$$

sich T dem Werthe von $\frac{1}{\log x}$ immer mehr und mehr nähert, je grösser man x nimmt, so kann man auch mit eben dem Rechte, wie bey jenen arithmetischen Beyspielen sagen, daß

$$T = \frac{1}{\log x}$$

werde, wenn man x über jede angebliche Gränzen hinaus, d. h. unendlich wachsen läßt.

XXXIII. Eben so lasse man in nachstehender Gleichung zwischen zwey veränderlichen Grössen x, y, nemlich

$$y = ax + bx^2 + cx^3$$

den Werth von x ohne Ende abnehmen, so wird zwar

zwar auch y ohne Ende abnehmen, aber wenn man das Verhältniß von y zu x nemlich

$$y : x = a + bx + cx^2 : 1$$

betrachtet, so wird sich solches dem Verhältnisse a : 1 immer mehr und mehr nähern, je kleiner x und folglich auch y wird. Nehmen also beyde ohne Ende ab, so daß man x und folglich auch y als unendlich klein betrachtet, so verschwinden die unendlich kleinen Glieder bx, cx^2 in Vergleichung mit der endlichen Grösse a, und giebt man nun dem Zeichen = die Bedeutung (XXXI), so ist in völliger Schärfe

$$y : x = a : 1.$$

XXXIV. Wollte man in dem angeführten Beyspiele x bis auf Null selbst abnehmen lassen, so würde auch $y = 0$ und die Proportion (XXXIII) hieße nun

$$0 : 0 = a : 1$$

Aber dann begreift man nicht leicht, wie zwey Nullen oder Nichtse noch in einem gewissen Verhältnisse stehen können, wie eine Null kleiner als eine andere seyn kann. So bald zwey von einander abhängige Grössen wie y und x völlig verschwinden, hört alle weitere Vergleichung derselben auf, da hingegen, so lange sie sich noch im Zustande ihrer Abnahme befinden, selbst wenn diese

Abnahme über alle angeblichen Gränzen hinausgedacht wird, also die Grössen y und x unendlich klein werden, noch immer ein Verhältniß derselben gedacht werden kann.

Ohne demnach y und x völlig verschwinden zu lassen, betrachtet man das Verhältniß a:1 als das Gränzverhältniß, dem sich das von y:x ohne Ende immer mehr und mehr nähert, und man darf nun mit eben dem Rechte y:x = a:1 setzen, als man z. B. die Summe der unendlichen Reihe (XXXII) = 1 setzt, da sie sich doch eigentlich diesem Werthe, nur ohne Ende nähert.

XXXV. Manche Schriftsteller betrachten die Null als die Gränze, der sich eine ohne Ende abnehmende Grösse immer mehr und mehr nähert. Diese Vorstellung kann man immer gelten lassen, wenn man die ohne Ende abnehmende oder unendlich kleine Grösse, nur nicht selbst für Null hält, oder glaubt daß sie es völlig werden könnte, weil dies dem Begriffe einer ohne Ende abnehmenden Grösse widerspricht (XX). Noch weniger darf man sich erlauben, eine unendlich kleine Grösse bald für Null zu halten, bald aber auch wieder als eine würkliche Grösse zu behandeln, wie so

häu-

häufig in der Differenzialrechnung und den Anwendungen derselben zu geschehen pflegt. Aber diese Wiedersprüche vermeidet man durch den richtigen Begriff des unendlich Kleinen, wie solcher bisher, wie ich glaube, so deutlich entwickelt worden ist, als es bey abstracten Begriffen nur möglich ist.

Will man daher die Proportion (XXXIV)

$$0 : 0 = a : 1$$

rechtfertigen, oder ihr einen vernünftigen Sinn unterlegen, so muß man sich unter diesen Nullen die ohne Ende abnehmenden Grössen y, x selbst gedenken, in so fern sie bey dieser Abnahme sich den Nullen ohne Ende immer mehr und mehr nähern, ohne sich jedoch je in solche Nullen selbst zu verwandeln, wie z. B. die Brüche in den Reihen (XX.).

Oder man kann sich auch vorstellen, daß die Grössen y, x das Verhältniß a : 1 haben, in dem Augenblicke da sie nach dem Gesetz der Stetigkeit und ihrer gegenseitigen Dependenz von einander, im Begriff sind in den Nullzustand überzugehen, da sie also beyde noch einen Werth haben, aber doch noch nicht völlig zu Null geworden sind. Daher nennen auch einige das Verhältniß a : 1 das Verschwindungsverhältniß der Grössen y, x, welche Benennung denn auch statt des Worts Gränzverhältniß gebraucht werden kann.

Erstes Kapitel.

Differenzialrechnung.

§. 2.

I. Es sey y eine Function von x, und x ändere sich um einen gewissen Werth oder um eine gewisse Differenz, welche ich mit Δx bezeichnen will, so wird sich auch y um einen gewissen Werth oder um eine gewisse Differenz $= \Delta y$ verändern, also y sich in $y + \Delta y$ verwandeln, wenn x sich in $x + \Delta x$ verändert.

II. Da y durch x vermöge einer Gleichung gegeben ist, so muß sich daraus auch eine Gleichung zwischen Δy und Δx finden lassen. Sucht man nun aus dieser Gleichung das Verhältniß von $\Delta y : \Delta x$, oder auch den Exponenten dieses Verhältnisses, d. h. den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, so nennt man $\Delta y : \Delta x$ das Differenzverhältniß und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Differenzquotienten,

und

und sucht man endlich dies Verhältniß für den Fall, daß die Differenzen Δx, Δy ohne Ende immer kleiner und kleiner werden, oder sich in sogenannte Differenziale verwandeln, so wird jenes Verhältniß das Differenzialverhältniß, der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenzialquotient, und die Auffindung dieses Verhältnisses oder Quotienten die Differenzialrechnung genannt. Ein Beyspiel wird die Sache am besten erläutern.

III. Es sey also z. B. $y = ax^2$, so ist, $x + \Delta x$ statt x, und $y + \Delta y$ statt y gesetzt,

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$$

Oder $y + \Delta y = ax^2 + 2ax.\Delta x + a(\Delta x)^2$

Hievon ziehe man die ungeänderte Function (nemlich $y = ax^2$) selbst ab, so erhält man die Differenzgleichung

$$\Delta y = 2ax.\Delta x + a(\Delta x)^2.$$

IV. Und hieraus das Differenzverhältniß, und den Differenzquotienten, nemlich

$$\Delta y : \Delta x = 2ax + a.\Delta x : 1$$

und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a.\Delta x.$

V. Läßt man nun Δx ohne Ende abnehmen (in welchem Falle auch Δy ohne Ende abnimmt), so nähert sich der Ausdruck $2ax + a . \Delta x$ ohne Ende immer mehr und mehr dem von Δx unabhängigen Gliede $2ax$, und man erhält für das Gränzverhältniß von $\Delta y : \Delta x$ in diesem Falle $2ax : 1$, oder $\Delta y : \Delta x = 2ax : 1$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax$.

VI. Man nennt die Differenzen Δy, Δx, wenn solche unendlich abnehmen, ohne jedoch völlig zu verschwinden, Differenziale, und bezeichnet sie dann mit dy, dx, wo denn der Buchstabe d bey unendlich kleinen Differenzen, so gut wie der Buchstabe Δ bey endlichen Differenzen ein bloßes Zeichen ist, welches, so bald in Rechnungen von Differenzialien die Rede ist, so wenig mit einem Factor, als dy mit einem Producte zu verwechseln ist.

Auch schreibt man um Verwirrung zu vermeiden, in jedem Product, worin ein Differenzial vorkömmt, das Differenzial gern zuletzt, z. B. $a . \Delta x$ statt $\Delta x . a$, oder $a . dx$ statt $dx . a$.

VII. Demnach hat man für die angenommene Funktion (III) das Differenzialverhältniß

dy

$$dy : dx = 2ax : 1$$

und den Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 2ax.$$

VIII. Da y nichts als den Ausdruck ax^2 selbst bedeutet, so heißt dy auch das Differenzial von ax^2, wenn dx das Differenzial der veränderlichen Grösse x selbst bedeutet. Demnach kann man die Ausdrücke (VII.) auch so darstellen

$$d(ax^2) : dx = 2ax : 1$$

$$\frac{d(ax^2)}{dx} = 2ax.$$

IX. Setzt man statt der Proportion (VII.) die Gleichung

$$dy = 2ax \,.\, dx$$

so nennt man dies die Differenzialgleichung von (III.), wofür auch

$$d(ax^2) = 2ax \,.\, dx$$

geschrieben werden kann.

X. Wollte man die Differenzialien dx, dy, völlig als Nullen betrachten, wie von einigen Schriftstellern zu geschehen pflegt, so würde die Proportion (VII.) auch so heißen

$$0 : 0 = 2ax : 1$$

wo-

wogegen aber Erinnerungen wie (§. 1. XXXIV.) auf keinerley Weise zu vermeiden sind.

XI. Indessen glaubt man, daß die Proportion (VII.) nicht in völliger Schärfe statt finden könnte, wenn man in derjenigen (IV.) für endliche Differenzen, nicht Δx völlig $= 0$ setzt, in welchem Falle denn auch $\Delta y = 0$ würde; und so will man denn, daß die Zeichen dy, und dx, welche man statt der Nullen hinzusetzen beliebt, nur ausdrücken sollen, daß es die Differenzen Δy, und Δx sind, welche in den Null-Zustand übergehen, und daß sie in diesem Falle genau das Verhältniß $2ax : 1$ haben. Allein durch dies Hinschreiben der Zeichen dy, dx, statt der Nullen, welche sie bedeuten sollen, sind die (§. 1. XXXIV.) statt findenden Erinnerungen auf keinerley Weise beseitiget, und es bleibt, um einer solchen Proportion wie $0 : 0 = 2ax : 1$ eine annehmbare Bedeutung zu verschaffen, nichts übrig, als sich vorzustellen, daß jene Nullen die ohne Ende abnehmenden Differenzen dy, dx selbst bedeuten, in so fern sich diese Differenzen den Nullen ohne Ende immer mehr und mehr nähern, ohne jedoch je sich in solche selbst zu verwandeln.

XII. Die Behauptung daß $dy : dx = 2ax : 1$ nie in völliger Schärfe wahr seyn könne, so lange dy, dx noch angebbare Werthe haben, hat zwar ihre völlige Richtigkeit. Allein in der Differenzialrechnung verlangt man auch nicht daß dy, dx noch angebbare Werthe (etwa wie Wolfs Sandkörner in Vergleichung eines Berges. M. s. dessen Anfangsgr. d. Math. IV. Theil. Differenzialrechnung §. 6.) haben sollen. Sie sollen kleiner als jede angebbare Grösse seyn. Da dies möglich ist zu gedenken, so klein auch dy, dx seyn mögen, unbekümmert wie groß sie an und für sich selbst sind, wenn sie nur nicht völlige Nullen oder Nichtse sind, so enthält die Proportion $dy : dx = 2ax : 1$ auch nicht den geringsten Widerspruch, weil es gewiß ist, daß die Gränze des Verhältnisses $2ax + a\Delta x : 1$ bey unendlich fortdauernder Abnahme von Δx, kein anderes als $2ax : 1$ seyn kann. Hätte man um die unendliche Annäherung von $2ax + a\Delta x$ zu dem Werthe $2ax$ anzudeuten, ein eigenes Zeichen etwa wie (§. 1. XXX.) eingeführt, so würde nie jemand gegen einen Ausdruck wie $dy : dx \equiv 2ax : 1$ etwas zu erinnern gefunden haben.

XIII. Nie verlangt man übrigens in der Differenzialrechnung auch etwas anders, als solche Annäherungs- oder Gränzverhältnisse zwischen Δy und Δx, was auch y für eine Function von x seyn mag. Man bekümmert sich weder darum, wie groß die Differenzen, oder Differenzialien, an und für sich selbst sind, noch auch wie viel das Gränzverhältniß von dem wahren unterschieden ist, wenn nur beyde Verhältnisse einander so nahe kommen, daß sich der Unterschied über jede denkbare Gränze vermindern läßt.

XIV. Andere haben den Begriff des unendlich Kleinen in der Differenzialrechnung, so wie überhaupt in der höhern Analysis, ganz zu vermeiden gesucht, und das Geschäft der Differenzialrechnung bloß darin gesetzt, in einer vollständigen Differenzengleichung, wie z. B.

$$\Delta y = 2ax \,.\, \Delta x + a(\Delta x)^2 \,. \quad \text{(III.)}$$

oder allgemeiner

$$\Delta y = P \,.\, \Delta x + Q(\Delta x)^2 + R(\Delta x)^3 \text{ u. s. w.}$$

(wo P, Q, R ꝛc. wieder besondere Functionen von x bedeuten), diese Functionen selbst, aus der für y angegebenen primitiven, auf eine leichte Art zu finden oder abzuleiten, ohne den directen Weg wie

(III.) zu befolgen, nach welchem z. B. für die Function (III.)

$$P = 2ax;\ Q = a;\ R = o \text{ ꝛc.}$$

gefunden wurde.

XV. Darauf gründet sich z. B. die Functionen-Lehre von La Grange; der Derivationscalcul von Arbogast u. dgl.

Allein so sinnreich auch diese Theorien ausgeführt sind, so geräth man doch auf so große Weitläuftigkeiten, bey der Anwendung derselben auf allerley Gegenstände der Analysis, höhern Geometrie, Mechanik ꝛc.; daß ich es wenigstens nicht für räthlich gefunden habe, den Differenzialcalcul nach diesen Ansichten zu behandeln, bey deren Anwendung, wenn man alles genau erwägt, doch der Begriff des unendlich Kleinen, oder einer unendlichen Annäherung (XII) zu einem gewissen Werthe, nicht zu vermeiden ist, so künstlich derselbe auch in jenen Theorien verschleyert zu seyn scheint.

XVI. Andere Schriftsteller z. B. Klügel (Mathem. Wörterbuch Art. Differenzial) wollen unter einem Symbol wie $\frac{dy}{dx}$ nichts anders als

den von Δx ganz unabhängigen Theil P des Differenzquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q.\Delta x + R.\Delta x^2 \ldots \text{(XIV.)}$$

verstehen. Die Glieder wie $Q.\Delta x$, $R\Delta x^2$ ꝛc., die man in der allgemeinen Gleichung für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ weglasse, würden nicht als Nullen, oder als unendlich klein, als unvergleichbar klein betrachtet, sondern sie würden weggelassen, weil sie gar nicht zu dem gehörten, was man eigentlich suche, und durch das Symbol $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ anzeigen wolle. Man nenne zwar dx, dy, Differenziale, aber man müsse sie durchaus nicht als Grössen betrachten, so klein man sich diese auch vorstellen mögte. Der Buchstabe d gebe bloß den Ursprung der Function $P = \frac{dy}{dx}$ zu erkennen, daß sie der wesentlichste und charakteristische Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der endlichen Veränderungen von y und x sey. So bleibe es völlig gleichgültig, wie groß oder klein man sich auch das Δx oder Δy gedenken wolle, und wenn man das Gleichheitszeichen gebrauche und $\frac{dy}{dx} = P$ setze, so solle man

nicht

nicht sagen $\frac{dy}{dx}$ sey gleich P, sondern $\frac{dy}{dx}$ zeige nur an, daß man darunter den Theil P des Differenz-quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verstehe.

So will man also auch durch diese Ansichten dem Begriff des unendlich Kleinen ausbeugen. Allein bey der würklichen Anwendung derselben zeigt sich doch wieder so manche Veranlassung, bey der man sich unter den Zeichen dy, dx, würkliche über alle Gränzen abnehmende Grössen gedenken muß, daß man den Begriff des unendlich Kleinen nur auf eine künstliche Weise verschleyert, wenn man dem Symbol $\frac{dy}{dx}$ die angeführte Bedeutung geben will.

XVII. Es bleibt einmahl für den Verstand nichts befriedigender, als unter einem Ausdrucke wie $\frac{dy}{dx} = P$ sich bloß die unendliche Annäherung des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu dem Werthe von P zu gedenken. Was sich einem gewissen Werthe P unendlich nähert, wird in der Abstraction als diesem Werthe gleich angesehen, weil wenn sich ein Un-

Unterschied angeben ließe, dies so viel heißen würde, man soll die Annäherung noch weiter treiben, und da nun diese Forderung kein Ende hat, so kann sich also auch kein Unterschied angeben lassen, so klein sich ihn der Verstand auch gedenken mag, d. h. man gedenkt sich den Werth von P erreicht, wenn Δy, Δx so klein werden, daß sie um weniger als jede angebliche Grösse von würklichen Nullen unterschieden sind, und daß dies möglich ist zu gedenken, erhellet aus den oben angeführten Beyspielen. Diese Vorstellung einer unendlichen Abnahme von Δy, Δx, und folglich auch einer unendlichen Annäherung (XII.) des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu dem Werthe von P, ist dem Verstande genügender, als Δy, Δx in völlige Nullen übergehen zu lassen, und dadurch die ganze Differenzialrechnung bloß in eine künstliche Nullenrechnung zu verwandeln.

So bald also die Rede davon ist, die unendliche Annäherung des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu einem gewissen Werthe $= P$ zu finden, für den Fall daß die zusammengehörigen Differenzen Δy, Δx ohne Ende immer kleiner und kleiner werden,

schreibt

schreibt man statt Δy, und Δx, die Ausdrücke dy, dx, und drückt nun jene Forderung aus durch $\frac{dy}{dx} = P$.

XVIII. In der That läuft es auch völlig auf eins hinaus, ob man sagt $\frac{dy}{dx}$ solle den von Δx ganz unabhängigen Theil P des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (XVI), oder die unendliche Annäherung dieses Quotienten zu dem Werthe P bedeuten, weil es kein Zweifel bleibt, daß wenn anders P, Q ꝛc. in dem Ausdrucke für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (XIV) endliche Werthe haben, und Δx ohne Ende abnimmt, der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich ohne Ende dem Werthe von P nähert; und weiter soll auch der Ausdruck $\frac{dy}{dx} = P$ nichts bedeuten, auch hat er nie bey irgend einer würklichen Anwendung auf Gegenstände der Geometrie, Mechanik u. dergl. eine andere Bedeutung. Man verlangt nicht den eigentlichen Werth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wenn Δy und Δx verschwinden, sondern den Werth wel-

welchem sich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ohne Ende immer mehr und mehr nähert. Le limite d'un rapport $\Delta y : \Delta x$ sagt la Croix (Traité du Calcul différentiel etc. Paris 1797. S. 192) n'est point le rapport lui-même, mais une quantité, dont il peut approcher d'aussi près qu'on voudra, und dies kann man von dem Ausdruck $\frac{dy}{dx} = P$ behaupten, ohne anzunehmen, daß hiebey dy, dx selbst als Nullen betrachtet werden.

Aber die leztere Darstellungsart des Differenzialcalculs, nemlich dem Ausdruck $\frac{dy}{dx} = P$ die Bedeutung einer unendlichen Annäherung des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu dem Werthe von P zu geben, ist für die Anwendung die brauchbarste, daher auch la Croix, indem er solche mit andern Darstellungsarten des Differenzialcalculs vergleicht, ganz richtig urtheilt: "Le rapprochement de ces méthodes prouvera surement aux lecteurs attentifs, qu'elles ne diffèrent, que dans les expressions, et peut être penseront-ils, com-

comme moi, que la dernière (nemlich die Methode der Gränzverhältnisse oder limites) lorsqu'elle a été bien expliquée, est précieuse par la facilité, qu'elle donne, à resondre de nouvelles questions, facilité dont la theorie des courbes a double courbure de Monge, que j'ai exposée, offre un exemple remarquable u. s. w. (Prèface p. XXVII.)

In der That ist es lächerlich, mit welcher Aengstlichkeit man sich dem Begriffe des unendlich Kleinen in der Mathematik überall zu entziehen sucht, da doch so viele Untersuchungen uns auf jenen Begriff zurückführen, durch welche sie nur allein auf eine geschmeidige Art sich entwikkeln lassen. Es ist also von der größten Wichtigkeit, Anfänger sobald als möglich an diese Begriffe zu gewöhnen, und sie mit der wahren Bedeutung derselben vertraut zu machen. Man raubt ihnen sonst die schönste und brauchbarste Ansicht der höhern Analyse, und die reichhaltigste Quelle zu neuen Untersuchungen und Erfindungen, zu welchen sie ohne die Betrachtung des unendlich Kleinen, nur auf einem sehr dornigten und unbehaglichen Wege gelangen würden.

§. 3.

§. 3.

Aufgabe.

Es ist die Function

$$y = Ax^n + B$$

gegeben, man soll die Gränze des Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$, d. h. das Verhältniß der Differenzialien $dy : dx$ finden.

Aufl. I. Weil A, B, unveränderliche Grössen bedeuten, so ist die geänderte Function, wenn x um Δx, und y um Δy sich ändert

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x)^n + B$$

II. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} . \Delta x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} . (\Delta x)^2 \text{ ꝛc.}$$

Demnach

$$y + \Delta y = Ax^n + n . Ax^{n-1} . \Delta x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} Ax^{n-2} (\Delta x)^2 \text{ ꝛc.} + B.$$

III. Hievon ziehe man die ursprüngliche Function $y = Ax^n + B$ ab, so erhält man, für die Differenzengleichung

$$\Delta y = n . Ax^{n-1} . \Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2} Ax^{n-2} . (\Delta x)^2 . .$$

in

in welcher Reihe die folgenden Glieder, der Ordnung nach den Factor $(\Delta x)^3$; $(\Delta x)^4$ u. s. w. enthalten.

IV. Demnach wird das Verhältniß

$$\Delta y : \Delta x = n A . x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} A x^{n-2} . \Delta x \text{ u. s. w. } : 1$$

und der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n . A x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} A x^{n-2} \Delta x \ldots$$

V. Dieser Ausdruck nähert sich dem Gliede $n A x^{n-1}$, worin Δx nicht vorkommt, ohne Ende immer mehr und mehr, je kleiner man Δx nimmt. Verwandeln sich also Δy, Δx, in die Differenzialien, so erhält man

$$dy : dx = n A x^{n-1} : 1$$

oder den Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = n A x^{n-1}$$

wofür man als bequemern Ausdruck, auch die Differenzialgleichung

$$dy = n A x^{n-1} dx$$

zu schreiben pflegt.

§. 4.

§. 4.

Zusatz. Da y den Ausdruck $Ax^n + B$ bedeutet, so sagt man auch $nAx^{n-1}dx$ sey das Differenzial von $Ax^n + B$, oder

$$d(Ax^n + B) = nAx^{n-1}dx$$

Auf das Differenzial hat also die constante Grösse B nicht den geringsten Einfluß, und es ist einerley Ax^n oder $Ax^n + B$ zu differenziiren, wovon die Ursache aus (II. III.) leicht einzusehen ist. Nur solche unveränderliche Grössen wie A, welche in der vorgegebenen Function y in veränderliche multiplicirt sind, kommen auch in den Differenzialen gewöhnlich vor.

§. 5.

Aufgabe.

Es sey $\Psi = P + Q + R + S + C$, wo C eine unveränderliche Grösse, P, Q, R, S ꝛc. lauter veränderliche Grössen sind; man soll das Differenzial von Ψ finden.

Aufl. Es ist klar, daß in diesem Falle das Differenzial von Ψ, aus der Summe der Differenzialien von den veränderlichen Grössen P, Q, R, S ꝛc. bestehen wird. Denn die geänderte

Function

Function Ψ ist $\Psi + d\Psi$, die geänderte Grösse $P = P + dP$, die geänderte $Q = Q + dQ$ u. s. w., und die unveränderliche Grösse C hat kein Differenzial also $dC = 0$. Demnach

$$\Psi + d\Psi = P + dP + Q + dQ + R + dR + S + dS + C$$

hievon abgezogen die ungeänderte

$$\Psi = P + Q + R + S + C$$

so ist die Differenzialgleichung

$$d\Psi = dP + dQ + dR + dS.$$

Sind einige von den Grössen P, Q ꝛc. negativ, so werden begreiflich auch die zugehörigen Differenziale in dem Ausdrucke für $d\Psi$ negativ gesetzt.

§. 6.

Zus. Begreiflich können die veränderlichen Grössen P, Q ꝛc. auch wieder Functionen von andern seyn, oder auch Functionen von einer und derselben veränderlichen Grösse, z. B. von x. Ein paar Beyspiele werden dieses erläutern.

Erstes Beyspiel. Man soll das Differenzial von

$$\Psi = 4x^5 + 7x^3 + 5x + 8$$

finden.

Hier wäre also $P = 4 . x^5$, also $dP = 5 . 4x^4\, dx$ nach der gefundenen allgemeinen Formel (§. 4.)

wor:

worin für gegenwärtigen Fall $A = 4$; $n = 5$ seyn würde.

Ferner $Q = 7x^3$ also $dQ = 3 \cdot 7x^2 dx$ (§. 4.)

$R = 5x$ also $dR = 5dx$

$C = 8$ also $dC = 0$

demnach die Differenzialgleichung

$$d\Psi = (20x^4 + 21x^2 + 5)\,dx$$

oder $(20x^4 + 21x^2 + 5)\,dx$ ist das Differenzial von $4x^5 + 7x^3 + 5x + 8$, wo statt der 8 auch jede andere unveränderliche Grösse stehen könnte.

Zweytes Beyspiel.

$$\Psi = 4x^7 + 3y^2 + 5z.$$

Also $P = 4x^7$; $dP = 28x^6 dx$; $Q = 3y^2$; $dQ = 6y\,dy$; $R = 5z$; $dR = 5dz$. Mithin

$$d\Psi = 28x^6 dx + 6y\,dy + 5dz.$$

§. 7.

Zusatz. Verlangte man nicht die Differenzialgleichungen sondern die Differenzialquotienten, so hätte man für Beyspiel I.

$$\frac{d\Psi}{dx} = 20x^4 + 21x^2 + 5$$

und

und für Beyspiel II.

$$\frac{d\Psi}{dx} = 28x^6 + 6y \cdot \frac{dy}{dx} + 5 \cdot \frac{dz}{dx}$$

Wo also in dem letztern Falle $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dz}{dx}$ wieder besondere Differenzialquotienten bezeichnen, welche bekannt seyn müssen, wenn der erstere $\frac{d\Psi}{dx}$ soll gefunden werden können.

So wäre auch für das Verhältniß von $d\Psi$ zu dy

$$\frac{d\Psi}{dy} = 6y + 28x^6 \cdot \frac{dx}{dy} + 5 \cdot \frac{dz}{dy}$$

in welchem Falle also die Werthe der Differenzialquotienten $\frac{dx}{dy}$; $\frac{dz}{dy}$ als bekannt angesehen werden müssen.

§. 8.

Aufgabe.

Wenn P, Q nach Gefallen veränderliche Grössen sind, das Differenzial des Products P.Q zu finden, d. h. P.Q zu differenziiren.

Aufl.

Aufl. I. Man nenne das Product $P.Q$ der Kürze halber Z, so soll man aus der Gleichung $Z = P.Q$ die Differenzialgleichung finden.

II. Man schreibe demnach $Z + dZ$ statt Z

. . . $P + dP$ statt P

. . . $Q + dQ$ statt Q

so wird die geänderte Function heißen

$$Z + dZ = (P + dP).(Q + dQ)$$
$$= PQ + PdQ + QdP + dQ.dP$$

Also (nach Abzug der ungeänderten $Z = P.Q$)

$$dZ = PdQ + QdP + dQdP$$

Weil aber hier dQ, dP keine endlichen Differenzen sondern Differenzialien bedeuten sollen, so verhält sich z. B.

$$dQdP : PdQ = dP : P$$
$$dQdP : QdP = dQ : Q$$

d. h. das Product $dQ.dP$ verschwindet gegen PdQ, und QdP, weil es sich gegen diese beyde verhält, wie ein unendlich Kleines zu einer endlichen Grösse. Demnach nähert sich dZ ohne Ende immer mehr und mehr dem Ausdruck $PdQ + QdP$, d. h. die Differenzialgleichung ist

$$dZ = PdQ + QdP.$$

Oder $d(P.Q) = PdQ + QdP$

Um das Differenzial eines Products zu finden, multipliret man also jeden Factor in das Differenzial des andern, und addirt die einzelnen Producte.

§. 9.

Beyspiel I. Es sey $Z = y^n x^m$ zu differenziiren.

Man setze demnach

$P = y^n$; also $dP = ny^{n-1} dy$ (§. 4.)

$Q = x^m$; also $dQ = mx^{m-1} dx$

so wird dZ oder

$d(y^n x^m) = my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy$

welches man der Kürze halber $= \mathfrak{P} dx + \mathfrak{Q} dy$ setzen kann, wo denn $\mathfrak{P} = my^n x^{m-1}$; und $\mathfrak{Q} = nx^m y^{n-1}$ auch wieder Functionen von x und y sind.

Beyspiel II. Es seyen P, Q complexe Grössen z. B.

$Z = (ax + by) . (\alpha x + \beta y)$

also $P = ax + by$; $Q = \alpha x + \beta y$; so ist

$dQ = \alpha dx + \beta dy$; $dP = adx + bdy$;

demnach

dZ oder $d(ax + by) . (\alpha x + \beta y) = \mathfrak{P} dx + \mathfrak{Q} dy$

wo

wo jetzt $P = 2a\alpha x + (\alpha b + \beta a)\, y$

$$Q = (\alpha b + \beta a)\, x + 2b\beta\, y$$

also auch wieder Functionen von x und y sind.

§. 10.

Zusatz. Wäre ein Product aus 3 Factoren, z. B.
$$Z = P.Q.R$$
zu differenziiren, so setze man auf einen Augenblick $Q.R = W$; also $Z = PW$, so wird
$$dZ = PdW + WdP$$
Aber wegen $W = QR$ ist $dW = QdR + RdQ$, demnach
$$dZ = PQdR + PRdQ + QRdP$$
Um überhaupt ein Product aus so viel Factoren man will zu differenziiren, wird das Differenzial jedes einzelnen Factors allemahl in das Product aller übrigen Factoren multiplicirt, und alles zusammen addirt.

§. 11.

Zusatz. Wären nun z. B. P, Q, R nach Gefallen Functionen von x, y, z, so wird sich allemahl
$$dR = \pi dx + \pi' dy + \pi'' dz$$
$$dQ = \rho dx + \rho' dy + \rho'' dz$$
$$dP = \varsigma dx + \varsigma' dy + \varsigma'' dz$$

ergeben, so daß π, π' ꝛc. ρ, ρ' ꝛc. ς, ς' ꝛc.; auch wieder Functionen jener veränderlichen Grössen sind. Daraus findet sich dann

$$dZ = \left.\begin{matrix} PQ\pi \\ +PR\rho \\ +QR\varsigma \end{matrix}\right\} dx + \left.\begin{matrix} PQ\pi' \\ +PR\rho' \\ +QR\varsigma' \end{matrix}\right\} dy + \left.\begin{matrix} PQ\pi'' \\ +PR\rho'' \\ +QR\varsigma'' \end{matrix}\right\} dz$$

oder $dZ = \mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz$

wo $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, aus den Factoren P, Q, R, und ihren Differenzialien leicht gefunden werden können.

§. 12.

Zusatz. In der Aufgabe (§. 3.) ist zwar nicht besonders erwähnt worden, daß n jede ganze, gebrochene nnd verneinte Zahl bedeuten kann; indessen weiß man doch, daß der binomische Lehrsatz (§. 3. II.) und die daraus abgeleitete Differenzialgleichung (V.) in der grösten Allgemeinheit ihre Richtigkeit haben.

Gesetzt aber, man wolle vorläufig den binomischen Lehrsatz nur für n = einer ganzen Zahl gelten lassen, so wird doch die Differenzialgleichung (§. 3. V.) statt finden, auch wenn n ein gebrochener Exponent ist.

Denn man setze $n = \frac{\mu}{\nu}$, so daß μ und ν ganze Zahlen sind, so wird, aus der Gleichung $y = Ax^n$ (auf die constante Grösse C brauchen wir nicht Rücksicht zu nehmen)

$$y = A x^{\frac{\mu}{\nu}}$$

Demnach $y^\nu = A^\nu x^\mu$, und auf beyden Seiten differenziirt

$$\nu y^{\nu - 1} dy = \mu A^\nu x^{\mu - 1} dx$$

Mithin $dy = \frac{\mu}{\nu} A^\nu . \frac{x^{\mu - 1}}{y^{\nu - 1}} . dx$

Aber $y^{\nu - 1} = \frac{y^\nu}{y} = \frac{A^\nu . x^\mu}{A x^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Mithin $dy = \frac{\mu}{\nu} A^\nu . x^{\mu - 1} dx . \frac{A x^{\frac{\mu}{\nu}}}{A^\nu . x^\mu}$

$$= \frac{\mu}{\nu} A . x^{\mu - 1} \frac{dx . x^{\frac{\mu}{\nu}}}{x^\mu} = \frac{\mu}{\nu} A x^{\frac{\mu}{\nu} - 1} dx$$

Also völlig die Formel §. 3. V., wenn man dorten $n = \frac{\mu}{\nu}$ setzt.

§. 13.

Zusatz. So wird auch jene Formel (§. 3. V.) ihre Richtigkeit haben, wenn n eine negative Zahl ist.

Man

Man setze nemlich $n = -m$, so hat man

$$y = Ax^{-m} = \frac{A}{x^m}$$

Mithin $yx^m = A$

folglich wenn man auf beyden Seiten differenziirt, nach (§. 9.)

$$x^m dy + myx^{m-1} dx = 0.$$

wegen $dA = 0$, als dem Differenzial einer constanten Grösse. Also

$$dy = -myx^{-1} dx$$

d. h. $dy = -mAx^{-m} \cdot x^{-1} dx$

$$= -mAx^{-m-1} dx$$

völlig wie (§. 3. V.) wenn man das dortige $n = -m$ setzt.

Die Formel (§. 3. V.) ist allgemein richtig, was auch n für einen Werth haben mag.

§. 14.

Zusatz. Es bedeute U eine Function von so viel veränderlichen Grössen als man will, und es sey

$$Y = U^m$$

wo m jeden Exponenten bedeuten kann, so hat man nach der allgemeinen Formel (§. 3. V.) wo die veränderliche Grösse x jetzt das U bedeutet

$$dY = mU^{m-1} dU$$

wo

wo denn nur der Werth von dU, der sich durch die Differenziirung der Function U ergiebt, substituirt werden darf. Einige Beyspiele werden dies erläutern.

Beyspiel I. Es sey

$$Y = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

zu differenziiren, so ist $U = a^2 - x^2$; $m = -\frac{1}{2}$

demnach $dU = -2xdx$, weil a^2 als eine constant angenommene Grösse kein Differenzial hat. Und nun wegen $m - 1 = -\frac{3}{2}$

dY oder

$$d\frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -\frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot -2xdx$$

$$= \frac{xdx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

Beyspiel II. Es sey

$$Y = \sqrt[3]{(a^2 + x^2 + y^2)} = (a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$$

zu differenziiren, so hat man $U = a^2 + x^2 + y^2$;

also $dU = 2xdx + 2ydy$; $m - 1 = -\frac{2}{3}$

Mit-

Mithin dY oder

$$d\sqrt[3]{(a^2+x^2+y^2)} = \frac{2}{3}\frac{xdx+ydy}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{xdx+ydy}{\sqrt[3]{(a^2+x^2+y^2)^2}}$$

und so in andern Fällen.

§. 15.

Aufgabe.

Es sey der Bruch oder Quotient $\frac{X}{Y}$ zu differenziiren, wo X, Y, welche veränderliche Grössen oder Functionen man will, bezeichnen.

Auflösung. Man setze der Kürze halber

$$\frac{X}{Y} = Z$$

so ist $Z.Y = X$ und $ZdY + YdZ = dX$

Mithin $dZ = \frac{dX}{Y} - \frac{ZdY}{Y}$

oder in dem Gliede $\frac{ZdY}{Y}$ den Werth von Z hergestellt

dZ

$$dZ \text{ d. h. } d\,\frac{X}{Y} = \frac{dX}{Y} - \frac{XdY}{Y^2}$$

$$= \frac{YdX - XdY}{Y^2}$$

d. h., man multipliciret den Nenner Y in das Differenzial des Zählers X, und zieht davon ab das Product aus dem Zähler X in das Differenzial des Nenners Y. Den Rest dividirt man mit dem Quadrate des Nenners, so hat man das Differenzial des Bruchs oder Quotienten $\frac{X}{Y}$.

§. 16.

Beysp. I. Es sey X eine constante Grösse = A; so ist $dX = 0$; mithin

$$d\,\frac{A}{Y} = -\frac{AdY}{Y^2}.$$

Beysp. II. Es sey $X = x$; $Y = x + \sqrt{(1 + x^2)}$; also der Bruch $\frac{x}{x+\sqrt{(1+x^2)}}$ zu differenziiren, so hat man $dX = dx$; $dY = dx + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2xdx = dx + \frac{xdx}{\sqrt{(1 + x^2)}}$. Also

YdX

$$YdX - XdY = dx\sqrt{(1+x^2)} - \frac{x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

$$= \frac{dx(1+x^2) - x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

demnach $d\frac{X}{Y}$ oder

$$d\frac{x}{x+\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{dx}{(x+\sqrt{(1+x^2)})^2\sqrt{(1+x^2)}}$$

Und so in andern Fällen.

§. 17.

Anmerkung. I. Nach den bisherigen Vorschriften lassen sich alle algebraische Functionen, es seyen ganze, gebrochene, rationale oder irrationale Functionen von einer oder so viel veränderlichen Grössen als man will, differenziiren, und das Differenzial wird sich allemahl durch

$$dZ = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz \ldots$$

ausdrücken lassen, wenn Z eine solche Function von x, y, z . . . bedeutet, wo denn die Werthe von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ durch die bisherigen Vorschriften gefunden werden können, und wie z. B. (§. 9. 10.) ebenfalls wieder Functionen der in Z vorkommenden veränderlichen Grössen seyn werden.

II.

II. Dieser Ausdruck

$$dZ = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz \ldots$$

ist allgemein richtig, was auch sonst Z für eine Function von x, y, z.. seyn mag, wenn auch die Function nicht algebraisch sondern transcendent (Einleitung §. II.) seyn würde, denn es ist klar, daß dZ allemahl durch dx, dy, dz... bestimmt seyn muß, und daß denn diese Differenzialien durch gewisse Functionen, 𝔓, 𝔔, ℜ die sich durch die Differenziation von Z selbst ergeben, werden multiplicirt seyn müssen, welche nun in Ansehung der primitiven Function Z, abgeleitete Functionen (fonctions derivées) genannt werden, weil sie sich aus jener Z bestimmen lassen, wenn man Z so differenziirt, daß man entweder alle Grössen x, y, z zugleich, oder nur eine nach der andern als veränderlich betrachtet.

III. Um dieses zu erläutern sey z. B. Z eine Function von 3 veränderlichen Grössen x, y, z, also

$$dZ = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz.$$

Hier ist nun klar, daß wenn man Z so differenziirt hätte, daß man bloß x als veränderlich, y

und z hingegen als unveränderliche Grössen betrachtet hätte, schlechtweg

$$dZ = \mathfrak{P}dx$$

seyn würde, wegen $dy = o$, und $dz = o$.

Demnach hätte man die derivirte oder abgeleitete Function $\mathfrak{P} = \frac{dZ}{dx}$; d. h. die primitive Function Z so differenziirt, daß man bloß x als veränderlich betrachtet, und dann dieses Differenzial mit dx dividirt.

IV. Eine solche Operation, wodurch man bey der Differenziation einer Function Z nur eine Grösse, z. B. x als veränderlich, die übrigen hingegen während der Arbeit als unveränderlich ansieht, wird dadurch angedeutet, daß man den Ausdruck wie $\frac{dZ}{dx}$ in eine Parenthese einschließt $(\frac{dZ}{dx})$.

Auf dieselbe Art bedeutet $(\frac{dZ}{dy})$, daß man bey der Differenziation von Z bloß y als veränderlich betrachten, und das erhaltene Differenzial mit dy dividiren soll.

So

So wie man demnach

$$\mathfrak{P} = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$$

erhielt, so wird auf eben die Art

$$\mathfrak{Q} = \left(\frac{dZ}{dy}\right);\ \mathfrak{R} = \left(\frac{dZ}{dz}\right)$$ werden.

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sind also abgeleitete Functionen von Z, weil sie sich durch die Differenziirung von Z auf die angezeigte Weise ergeben.

V. Der Kürze halber wollen wir künftig $\mathfrak{P} = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$ den Differenzialquotienten von Z nach x; $\mathfrak{Q} = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$ den Differenzialquotienten von Z nach y u. s. w. nennen. Man nennt diese Ausdrücke auch partielle Differenzialquotienten von Z. Zu ihrer Bezeichnung läßet man sehr oft auch die Parenthesen weg, welches aber nur Verwirrung verursacht.

VI. Zur Erläuterung diene das Beyspiel (§. 9.) für zwey veränderliche Grössen.

Differenziirt man den dortigen Ausdruck $Z = (ax + by) \cdot (\alpha x + \beta y)$ erstlich so,

daß

daß man bloß x als veränderlich, y hingegen als constant betrachtet, so erhält man

$$\mathfrak{P} = (\frac{dZ}{dx}) = (ax + by)\,\alpha + (\alpha x + \beta y)\,a$$
$$= 2a\alpha x + (b\alpha + a\beta)\,y.$$

Differenzirt man nun aber zweytens Z so, daß man bloß y als veränderlich ansieht, so wird

$$\mathfrak{Q} = (\frac{dZ}{dy}) = (ax + by)\,\beta + (\alpha x + \beta y)\,b$$
$$= 2b\beta y + (a\beta + b\alpha)\,x$$

völlig wie §. 9., wo die Werthe von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, aus den dortigen Producten, $PdQ + QdP$ durch eine etwas weitläuftigere Rechnung gefunden worden sind.

VII. Substituirt man demnach statt $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, die gefundenen Werthe, so erhält man das vollständige Differenzial, d. h. wenn man beyde Grössen x, y, zugleich als veränderlich ansieht ist $dZ = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy$; oder in den Bezeichnungen (IV.)

$$dZ = (\frac{dZ}{dx})\,dx + (\frac{dZ}{dy})\,dy.$$

Und eben so wenn Z eine Function von 3 veränderlichen Grössen x, y, z seyn würde

dZ =

$$dZ = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz$$ oder

$$dZ = \left(\frac{dZ}{dx}\right)dx + \left(\frac{dZ}{dy}\right)dy + \left(\frac{dZ}{dz}\right)dz$$

z. B. wäre $Z = xyz^2 + y^4 + xz^3$

so hätte man

$$\mathfrak{P} = \left(\frac{dZ}{dx}\right) = yz^2 + z^3$$

$$\mathfrak{Q} = \left(\frac{dZ}{dy}\right) = xz^2 + 4y^3$$

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{dZ}{dz}\right) = 2xyz + 3xz^2$$

Jetzt wollen wir untersuchen, wie die Werthe von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ u. s. w. sich aus Z ableiten lassen, wenn Z eine transcendentische Function, z. B. eine logarithmische Grösse, eine Exponential-Grösse, einen Kreisbogen dessen trigonometrische Linie gegeben ist u. dergl. bedeuten würde.

§. 18.

Lehrsatz.

Wenn c eine gewisse Zahl, und μ einen kleinen Bruch bedeutet, so nähert sich der Ausdruck $\frac{c^\mu - 1}{\mu}$ ohne Ende immer mehr und mehr einer unverän-

der-

derlichen bloß von c abhängigen Grösse, je kleiner μ ist.

Bew. Man setze $c = 1 + a$; so wird nach dem binomischen Lehrsatz

$$c^\mu = (1+a)^\mu = 1 + \mu a + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} a^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} a^3 ..$$

Mithin

$$\frac{c^\mu - 1}{\mu} = a + \frac{\mu - 1}{1.2} a^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} a^3 + \text{u. s. w.}$$

$$= a - \frac{(1-\mu)}{1.2} a^2 + \frac{(1-\mu)(2-\mu)}{1.2.3} a^3 - \text{u. s. w.}$$

Nun ist klar, je kleiner man μ nimmt, desto mehr nähert sich $1 - \mu$ der Zahl 1; $2 - \mu$ der Zahl 2; $3 - \mu$ der Zahl 3 u. s. w.

Mithin nähert sich ohne Ende
$(1 - \mu)$ $(2 - \mu)$ dem Producte 1.2
$(1 - \mu)$ $(2 - \mu)$ $(3 - \mu)$ dem Producte $1.2.3$
u. s. w.

Also nähert sich

$\frac{c^\mu - 1}{\mu}$ ohne Ende der Reihe

$$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \text{ ic.}$$

D.

d. h. einer beständigen von μ nicht abhängigen Grösse, welche ich mit A bezeichnen will.

Wird also μ unendlich klein, so hat man

$$\frac{c^\mu - 1}{\mu} = A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \text{ u. s. w.}$$

$$= c - 1 - \frac{(c-1)^2}{2} + \frac{(c-1)^3}{3} - \text{u. s. w.}$$

Also ist A eine unveränderliche von c abhängige Grösse.

§. 19.

Zus. Aus $\frac{c^\mu - 1}{\mu} = A$ folgt

$$c^\mu = 1 + A \cdot \mu$$

d. h. c^μ nähert sich ohne Ende dem Werthe 1 je kleiner man μ nimmt, welches ohnehin aus der gemeinen Arithmetik bekannt ist. Aber die Gränze des Verhältnisses

$$\frac{c^\mu - 1}{\mu} : 1 \text{ ist } A : 1.$$

§. 20.

Aufgabe.

Es sey $y = \log x$. Wenn nun die veränderliche Grösse x um die Diffe-

renz Δx, folglich y um die Differenz Δy wächst, die Gränze des Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$ oder den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu bestimmen, wenn Δx und folglich auch Δy ohne Ende immer mehr und mehr abnehmen, d. h. sich in die Differenziale dy, dx verwandeln.

Aufl. I. Wenn c die Basis des logarithmischen Systems ist, zu welchem $\log x$ gehört, so hat man bekanntlich

$$c^y = x$$

Mithin $c^{y+\Delta y} = x + \Delta x = x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

d. h. $c^{y+\Delta y} = c^y\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

Oder auf beyden Seiten mit c^y dividirt

$$c^{\Delta y} = 1 + \frac{\Delta x}{x}$$

Mithin $\frac{c^{\Delta y} - 1}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{x \Delta y}$.

II. Werden nun Δy, Δx unendlich klein, d. h. verwandeln sie sich in die Differenziale dy, dx,

und

und läßt man ferner das unendlich kleine dy das μ in (§. 19.) bedeuten, so hat man

$$\frac{c^{dy} - 1}{dy} = A$$

Demnach $A = \frac{dx}{xdy}$ (I.)

Oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Ax}$

d. h. $\frac{1}{Ax}$ ist die Gränze, der sich der Quotient $\frac{dy}{dx}$ ohne Ende immer mehr und mehr nähert, welche Näherung denn durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Ax}$$

oder $dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x}$

ausgedrückt wird.

§. 21.

Wegen $y = \log x$, bedeutet dy also auch das Differenzial des Logarithmen von x. Man kann demnach die Differenzialgleichung (§. 20. II.) auch so ausdrücken

$$d \log x = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x}$$

d. h., man bekömmt das Differenzial des Logarithmen einer Zahl x, wenn man das Differenzial der Zahl x mit der Zahl selbst dividirt, und den Quotienten mit der unveränderlichen Grösse $\frac{1}{A}$, welche von der Basis c des logarithmischen Systems abhängt (§. 18.) multiplicirt.

Ich will der Kürze halber $\frac{1}{A}$ mit M bezeichnen, so ist

$$d \log x = M \cdot \frac{dx}{x}$$

§. 22.

Um zu sehen, was A und folglich auch M, für eine Zahl für das briggische System seyn würde, so kann man sich der briggischen Logarithmentafeln auf folgende Art dazu bedienen.

Man setze für μ einen sehr kleinen Bruch, je kleiner je besser, so wird c^{μ} sehr wenig von 1 unterschieden seyn, und folglich wenn man der Kürze halber $c^{\mu} = 1 + m$ setzt, m ebenfalls ein sehr kleiner Bruch seyn.

Nun

Nun hat man aus der Gleichung $c^\mu = 1 + m$; $\mu \log c = \log(1+m)$; also $\mu = \frac{\log(1+m)}{\log c}$

und folglich $\frac{c^\mu - 1}{\mu}$ oder

$$A = \frac{m \log c}{\log(1+m)} = \frac{m \log 10}{\log(1+m)} = \frac{m}{\log(1+m)}$$

weil für das briggische System $c = 10$ und $\log 10 = 1$ ist. Je kleiner man also m nimmt, desto mehr wird sich die Grösse $\frac{m}{\log(1+m)}$ dem Werthe von A nähern.

Es sey z. B. $m = 0{,}0000001$, so wird aus Gardiners oder Vega's grossen Logarithmentafeln

$\log(1+m) = \log 1{,}0000001 = 0{,}00000043429$

Mithin

$$A = \frac{0{,}0000001}{0{,}00000043429} = \frac{100000}{43429}$$

oder $A = 2{,}30258$. Mithin

$$M = \frac{1}{A} = 0{,}43429.$$

Wir werden indessen in der Folge sehen, wie man den Werth von M auch unmittelbar, ohne

Loga:

Logarithmentafeln berechnen kann. (M. s. unten §. 74. I. Beysp. (11.)).

Man könnte sich zwar der Reihe (§. 18.)

$$A = c - 1 - \frac{(c-1)^2}{2} + \frac{(c-1)^3}{3} - \text{u. s. w.}$$

$$= 9 - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \text{u. s. w.}$$

dazu bedienen, allein diese Reihe ist von der Beschaffenheit daß sie geradezu zu dem Zwecke nicht gebraucht werden kann.

§. 23.

Setzt man A und folglich auch $M = 1$, so nennt man das Logarithmensystem, dem dieser Werth entspricht, das natürliche System, und die zugehörigen Logarithmen die natürlichen. Um die Basis c dieses Systems zu finden, setzt man in die Gleichung

$$A = \frac{m \log c}{\log(1+m)}$$

$A = 1$ dies giebt denn $\log c = \frac{\log(1+m)}{m}$;

also z. B. für $m = 0{,}0000001$;

$$\log c = \frac{0{,}000000043429}{0{,}0000001} = 0{,}43429$$

Mithin $c = 2{,}71828$.

Diese

Diese Zahl, als Basis des natürlichen Systems, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben e bezeichnet. Wir werden in der Folge zeigen, sie auch unmittelbar zu bestimmen, und zwar in noch mehr Decimalstellen, als sie hier gefunden worden ist. M. s. unten (§. 74. zw. Beysp. (5)).

§. 24.

Bedeutet also y den natürlichen Logarithmen einer Zahl x, so ist $e^y = x$, und die Differenzialgleichung (§. 21.) heißt dann schlechtweg

$$dy \text{ oder } d \log nat\, x = \frac{dx}{x}; \text{ wegen } M = 1$$

wo denn der Ausdruck log nat x den natürlichen Logarithmen von x bezeichnet.

Aber für jedes andere Logarithmensystem ist

$$d \log x = M . \frac{dx}{x}$$

und muß man also, um das Differenzial eines solchen Logarithmen zu finden, die Zahl M, den sogenannten Modulus dieses Systems wissen.

§. 25.

Zus. Weil die Basis eines Logarithmensystems allemahl diejenige Zahl ist, deren Logarithme

rithme in diesem System $= 1$ ist, so hat man $\log nat\ e$ oder $\log nat\ 2,718 \ldots = 1$.

§. 26.

Anm. Künftig werden wir, wenn nicht ausschließlich ein Logarithmensystem benannt ist, unter einem Ausdruck wie $\log x$ immer den natürlichen Logarithmen verstehen, und also schlechtweg $d \log x = \frac{dx}{x}$ sezen.

Wäre aber z. B. von briggischen Logarithmen die Rede, so würde man schreiben müssen

$$d \log brigg.\ x = 0,43429 \cdot \frac{dx}{x}$$

weil für dieses System der Modulus $M = 0,43429 \ldots$ ist (§. 22.).

§. 27.

Zus. 1. Man kann sich von einem Logarithmen, wieder den Logarithmen gedenken, von diesem abermahls den Logarithmen u. s. w. Dies schreibt man auf folgende Art $\log \log x$ oder schlechtweg llx; $lllx$ u. s. w.

2. Das Differenzial eines Ausdrucks, z. B. llx zu finden, seze man der Kürze halber $lx = z$;

so

so ist $llx = lz$ also $d(llx) = d \log z =$
$\frac{dz}{z} = \frac{dlx}{lx} = \frac{dx}{xlx}$ weil $dlx = \frac{dx}{x}$ (§. 26.)

3. Um $lllx$ zu differenziiren, setze man jetzt $llx = u$ so ist $lllx = lu$.

Demnach

$$d(lllx) = \frac{du}{u} = \frac{d(llx)}{llx} \text{ oder}$$

$$d(lllx) = \frac{dx}{xlxllx} \quad (2)$$

Diese Schlüsse kann man leicht weiter fortsetzen.

§. 28.

Einen Ausdruck z. B. $(lx)^n$ zu differenziiren, setze man $lx = w$, so ist
$(lx)^n = w^n$; also $d(lx)^n = n.w^{n-1}dw$ (§. 3.V)
d. h. wegen $dw = \frac{dx}{x}$

$$d(lx)^n = n(lx)^{n-1} . \frac{dx}{x}$$

Wo n jeden ganzen, gebrochenen oder negativen Exponenten bezeichnen kann.

§. 29.

Zus. Bedeutet X welche Function von x man will, so ist allgemein

$$d \log X = \frac{dX}{X}.$$

Beysp. I. Es sey $X = a + x$ also $dX = dx$ so hat man

$$d \log (a + x) = \frac{dx}{a+x}$$

und wenn x negativ ist

$$d \log (a - x) = - \frac{dx}{a-x}.$$

Beysp. II. Es sey $X = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$; also $dX = \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}$ (§. 15.). Mithin $d \log X$ oder $d \log \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{dx}{x(1+x^2)}$

Beysp. III. Es sey $X = x + \sqrt{(1+x^2)}$, so ist $dX = dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

$$= \frac{(x + \sqrt{(1+x^2)})\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Also

Also d log X, oder

$$d \log (x + \surd(1 + x^2)) = \frac{dX}{X} = \frac{dx}{\surd(1+x^2)}.$$

§. 30.

Zus. Ist Z eine Function von so viel veränderlichen Grössen, x, y, z als man will, so ist auch

$$d \log Z = \frac{dZ}{Z}$$

wo denn der Werth von $dZ = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz$ am bequemsten nach (§. 17.) gefunden werden kann.

§. 31.

Zus. Z könnte ein Product aus zwey oder mehreren Factoren seyn; z. B. $Z = P.Q.R$, so wäre $\log Z = \log P + \log Q + \log R$; und folglich $d \log Z = \frac{dP}{P} + \frac{dQ}{Q} + \frac{dR}{R}$, z. B.

$$d \log [(a+x)(b+x)] = d \log (a+x) + d \log (b+x)$$

$$= \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x}.$$

§. 32.

Zus. Oder Z ein Quotient $= \frac{T}{W}$, so wäre

log

$$\log Z = \log T - \log W \text{ und}$$

$$d \log Z = \frac{dT}{T} - \frac{dW}{W}$$

z. B. $Z = \frac{1+x}{1-x}$; also $T = 1+x$; $W = 1-x$.

Mithin $\frac{dT}{T} = \frac{dx}{1+x}$; $\frac{dW}{W} = -\frac{dx}{1-x}$,

und folglich

$$d\log Z \text{ oder } d\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}$$

d. h. $d\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2dx}{(1+x)(1-x)} = \frac{2dx}{1-x^2}$.

§. 33.

Aufgabe.

Eine Grösse deren Exponent als veränderlich betrachtet wird, oder eine sogenannte Exponentialgrösse, z. B. y^x zu differenziiren, die Wurzel y mag selbst auch veränderlich, oder auch unveränderlich seyn.

Aufl. Man setze der Kürze halber $y^x = z$, so ist wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt

$$\log z = x \log y.$$

Mithin

Mithin weil $x . \log y$ ein Product ist, dessen Differenzial nach der Regel §. 8. gefunden werden kann, wenn man das dortige $P = x$; $Q = \log y$ setzt

$$\frac{dz}{z} = x . d (\log y) + \log y . dx$$

Oder $\frac{dz}{z} = \frac{x dy}{y} + dx . \log y$

Also $dz = z . \frac{x}{y} dy + z \log y . dx$

Oder statt z seinen Werth y^x gesetzt

$$d(y^x) = xy^{x-1} dy + y^x \log y \, dx.$$

§. 34.

Zus. Wäre $y = a$ unveränderlich, also $dy = 0$, so hätte man

$$d(a^x) = a^x . \log a . dx$$

unter den Logarithmen immer die natürlichen verstanden (§. 25.). Für den Fall daß $a = e$ (§. 23.), also $\log e = 1$ wäre, hätte man

$$de^x = e^x . dx.$$

§. 35.

Zus. Für $y = x$ hätte man

$$d(x^x) = (1 + \log x) x^x dx.$$

§. 36.

Zus. Allgemein ist $d(e^Z) = e^Z dZ$, wo Z jede Function von so viel veränderlichen Grössen, als man will, bedeuten kann, deren Differenzial dZ nach (§. 17.) am bequemsten gefunden wird.

§. 37.

Zus. Z könnte wieder eine Exponentialgrösse z. E. x^x seyn, dann wäre

$$de^{x^x} = e^{x^x}(1 + \log x)x^x\,dx \text{ (§. 35.)}$$

Oder wäre $Z = e^x$ also $dZ = e^x dx$ (§. 34.), so hätte man

$$de^{e^x} = e^{e^x} e^x dx.$$

Und so in andern Fällen.

§. 38.

Aufgabe.

Es sey $y = \sin\varphi$, man soll dy oder $d\sin\varphi$ finden.

Aufl. I. Wenn der Bogen φ um die Differenz $\Delta\varphi$ wächst, so wachse y um die Differenz Δy; also hat man

$$y + \Delta y = \sin(\varphi + \Delta\varphi)$$

und

und folglich

$$\Delta y = \sin(\varphi + \Delta\varphi) - y = \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi.$$

II. Aber

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi \cdot \cos\Delta\varphi + \sin\Delta\varphi \cdot \cos\varphi$$

Demnach

$$\Delta y = \sin\varphi\,(\cos\Delta\varphi - 1) + \sin\Delta\varphi \cdot \cos\varphi$$

Nun nähert sich aber $\cos\Delta\varphi$ ohne Ende immer mehr und mehr dem Sinus totus 1, je kleiner man $\Delta\varphi$ nimmt; und $\sin\Delta\varphi$ nähert sich ohne Ende dem Bogen $\Delta\varphi$ selbst; wird also $\Delta\varphi$ unendlich klein $= d\varphi$ also auch $\Delta y = dy$, so nähert sich $\cos\Delta\varphi - 1$, und folglich auch das Product $\sin\varphi\,(\cos d\varphi - 1)$ ohne Ende der Null, und das Product $\sin d\varphi \cdot \cos\varphi$ ohne Ende dem Werthe $d\varphi \cos\varphi$; demnach hat man

$$dy = d\varphi \cos\varphi \text{ d. h.}$$

$$d \sin\varphi = d\varphi \cdot \cos\varphi;$$

die Gränze des Verhältnisses $dy : d\varphi$ ist also $= \cos\varphi : 1$, oder der Quotient $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{d \sin\varphi}{d\varphi}$ nähert sich ohne Ende dem Werthe $\cos\varphi$; welches denn durch die Gleichung $\frac{dy}{d\varphi} = \cos\varphi$, oder $dy = d\varphi \cdot \cos\varphi$ ausgedrückt wird.

§. 39.

§. 39.

Bedeutet Z eine beliebige Function von φ, so ist eben so $d \sin Z = dZ \cos Z$.

Wäre z. B. $Z = m\varphi$, was auch m für eine Zahl seyn mag, so ist $dZ = m d\varphi$. Mithin

$$dZ = d \sin m\varphi = m d\varphi \cos m\varphi$$

Oder hätte man z. B. $Z = \alpha + \varphi$; wo α einen constanten Bogen bezeichne, so ist $dZ = d\varphi$ und $d \sin Z$ oder

$$d \sin (\alpha + \varphi) = d\varphi \cos (\alpha + \varphi)$$

Oder wenn α auch veränderlich gesetzt würde

$$d \sin (\alpha + \varphi) = (d\alpha + d\varphi) \cos (\alpha + \varphi).$$

§. 40.

Zus. Man setze $Z = 90° - \varphi$; so ist $dZ = - d\varphi$; $\sin Z = \cos\varphi$; $\cos Z = \sin\varphi$; diese Werthe in (§. 39.) substituirt, geben das Differenzial eines Cosinus

$$d \cos \varphi = - d\varphi \sin \varphi.$$

§. 41.

Zus. Hätte man die Potenz m eines Sinus also $(\sin \varphi)^m$ zu differenziiren, so gäbe dies nach (§. 4.) das dortige $n = m$, $A = 1$ und $x = \sin \varphi$ gesetzt

d

$$d(\sin\varphi)^m = m(\sin\varphi)^{m-1}\, d\sin\varphi$$
$$= m(\sin\varphi)^{m-1}\, d\varphi \cos\varphi \text{ (§. 38.)}$$

welches man denn auch wohl der Kürze halber mit Weglassung der Parenthese auf folgende Art schreibt:

$$d\sin\varphi^m = m\sin\varphi^{m-1}\, d\varphi\cos\varphi$$

welche Art zu schreiben wir denn auch künftig beybehalten wollen.

§. 42.

Zus. So findet sich auf eine ähnliche Weise $d\cos\varphi^m = -m\cos\varphi^{m-1} \,.\, d\varphi\sin\varphi$.

§. 43.

Zus. Ein Product z. B. $\sin\psi^n \,.\, \sin\varphi^m$, oder $\sin\varphi^m \,.\, \cos\psi^n$ zu differenziiren, verfährt man nach (§. 8.),

z. B. das dortige $P = \sin\psi^n$; und $Q = \sin\varphi^m$ gesetzt,

$$d\sin\psi^n \,.\, \sin\varphi^m = \sin\psi^n \,.\, d\sin\varphi^m$$
$$+ \sin\varphi^n \,.\, d\sin\psi^n$$

wo denn die Differenziale $d\sin\varphi^n$; $d\sin\psi^n$ nach (§. 41.) gefunden, und substituirt werden können.

§. 44.

Aufgabe.

Die Ausdrücke, tang φ; sec φ; cot φ; cosec φ zu differenziiren.

Aufl. I. Weil tang $\varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$; so hat man nach der §. 15. angegebenen Art einen Quotienten zu differenziiren

$$d \tan \varphi = \frac{\cos \varphi . d \sin \varphi - \sin \varphi . d \cos \varphi}{\cos \varphi^2} \text{ oder}$$

$$(\text{§. } 38{:}40.) = \frac{\cos \varphi^2 . d\varphi + \sin \varphi^2 . d\varphi}{\cos \varphi^2}$$

$$= \frac{(\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2)\, d\varphi}{\cos \varphi^2}.$$

Aber für den Sinus totus 1, ist

$\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2 = 1$ also $d \tan \varphi = \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2}$

II. Oder überhaupt

$$d \tan Z = \frac{dZ}{\cos Z^2}$$

was auch Z für eine Function von φ seyn mag.

III. Setzt man also $Z = 90° - \varphi$; also $dZ = - d\varphi$ so erhält man

$$d \cot \varphi = - \frac{d\varphi}{\sin \varphi^2}.$$

IV.

IV. Ferner ist $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$; demnach (§. 15.) $d\sec\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi^2}$

$$= \frac{d\varphi\ \sin\varphi}{\cos\varphi^2} = \frac{d\varphi\ .\ \mathrm{tang}\ \varphi}{\cos\varphi}$$

V. Und wegen $\mathrm{cosec}\ \varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$ nach einer ähnlichen Rechnung

$$d\,\mathrm{cosec}\,\varphi = -\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi^2} = -\frac{d\varphi\cot\varphi}{\sin\varphi}.$$

§. 45.

Diese Differenzialformeln sind durchaus von dem weitläuftigsten Gebrauche; wozu denn auch noch folgende gehören, die aus den bisherigen und aus (§. 26.) leicht abgeleitet werden.

VI. $d\log\sin\varphi = \frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{d\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin\varphi} = d\varphi\cot\varphi$

VII. $d\log\cos\varphi = -\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi} = -d\varphi\ \mathrm{tang}\ \varphi$

VIII. $d\log\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{d\ \mathrm{tang}\ \varphi}{\mathrm{tang}\ \varphi} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2\ \mathrm{tang}\ \varphi}$

$$= \frac{d\varphi}{\cos\varphi\ \sin\varphi} = \frac{2\,d\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

IX. $d \log \cot \varphi = - \frac{2 d\varphi}{\sin 2\varphi}$.

X. $d \log \sec \varphi = \frac{d \sec \varphi}{\sec \varphi} = d\varphi \tang \varphi$.

XI. $d \log \operatorname{cosec} \varphi = - d\varphi \cot \varphi$.

§. 46.

Man bezeichne einen Bogen dessen Sinus $= x$ gegeben ist, auf folgende Art, Arc sin x (von arcus Bogen) oder Bogen sin x oder auch schlechtweg durch B sin x; werden nun die Bezeichnungen Arc tang x; Arc cos x u. s. w. oder auch B tang x; B cos x auf eine ähnliche Art verstanden, so ergeben sich aus den Formeln (§. 44. 45.) noch andere welche ebenfalls von sehr häufigen Gebrauche sind.

I. Nemlich wenn man $\sin \varphi = x$ setzt so ist umgekehrt $\varphi = \text{Arc} \sin x$; und $d\varphi = d \text{Arc} \sin x$; $\cos \varphi = \sqrt{(1 - x^2)}$. Substituirt man also diese Ausdrückungen in die Formel

$d\varphi = \frac{d \sin \varphi}{\cos \varphi}$ (§. 38.) so erscheint sie jetzt auf folgende Art:

$$d \text{Arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

II.

II. Ferner setze man in (§. 40.) $\cos\varphi = x$, also $d\cos\varphi = dx$ so ist jetzt $\varphi = \text{Arc}\cos x$; $\sin\varphi = \sqrt{(1 - x^2)}$, und die Gleichung

$$d\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\sin\varphi}$$ erhält jetzt die Form

$$d\,\text{Arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

III. Setzt man in (§. 44.) $\text{tang}\,\varphi = x$, so wird $\varphi = \text{Arc tang}\,x$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)}}$ und die Formel

$$d\varphi = d\,\text{tang}\,\varphi \,.\, \cos\varphi^2$$

verwandelt sich jetzt in

$$d\,\text{Arc tang}\,x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

IV. Nach völlig ähnlichen Substitutionen erhält man aus den Formeln §. 44. III. IV. V. folgende

$$d\,\text{Arc cot}\,x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

V. $$d\,\text{Arc sec}\,x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

VI. $$d\,\text{Arc cosec}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

§. 47.

§. 47.

Es bedarf keines Beweises, daß jeder veränderlichen Grösse oder Function, die wir bisher differenziirt haben, auch noch eine beständige oder unveränderliche Grösse, durch die Addition oder Subtraction, hätte hinzugefügt gewesen seyn können, ohne daß dadurch das Differenzial im geringsten würde geändert worden seyn; denn wenn Z welche Function man will, bedeutet, so ist allgemein, wenn A eine unveränderliche Grösse bezeichnet, $d(Z \pm A)$ allemahl $= dZ$.

Also z. B.

$$d(\sin\varphi + A) = d\sin\varphi = d\varphi \cos\varphi.$$

Sind aber die Functionen welche differenziirt werden sollen, in einen unveränderlichen Factor multiplicirt, so wird mit diesem Factor auch das Differenzial multiplicirt. Denn es ist allgemein

$$d.MZ = MdZ + ZdM \text{ (§. 8.)}$$

Ist demnach M unveränderlich also $dM = 0$, so ist $dMZ = MdZ$.

Man differenziirt also bloß Z, und multiplicirt das Differenzial in den unveränderlichen Factor M.

§. 48.

Zus. Aus den bisherigen Differenzialformeln lassen sich durch Combinationen unzählige

andere

andere ableiten, wie wir unter andern in der Integralrechnung sehen werden. Hier begnüge ich mich nur vorläufig nachstehende sehr wichtige Formeln, aus den vorhergehenden abzuleiten.

I. Man setze in die Formel §. 32. statt x eine imaginäre oder unmögliche Grösse von der Form tang $\varphi . \sqrt{-1}$, so wird daselbst

$$dx = \sqrt{-1} . d \tang \varphi = \sqrt{-1} . \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2}$$

(§. 44. I.); und $1 - x^2 = 1 + \tang \varphi^2$; demnach

$$d \log \frac{1 + \tang \varphi . \sqrt{-1}}{1 - \tang \varphi . \sqrt{-1}} =$$

$$2\sqrt{-1} . \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2 (1 + \tang \varphi^2)}$$

Aber $1 + \tang \varphi^2 = \sec \varphi^2 = \frac{1}{\cos \varphi^2}$; demnach $d \log \frac{1 + \tang\varphi . \sqrt{-1}}{1 - \tang\varphi . \sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} . d\varphi$

Aber $2\sqrt{-1} . d\varphi$ ist das Differenzial von $2\sqrt{-1} . \varphi$ wozu aber noch eine constante Grösse $= A$ gesetzt werden könnte (§. 47.). Also ist

$$d(A + 2\sqrt{-1} . \varphi) = d \log \frac{1 + \tang\varphi \sqrt{-1}}{1 - \tang\varphi \sqrt{-1}}$$

Mit-

Mithin auch die Function

$$A + 2\varphi\sqrt{-1} = \log \frac{1 + \tang\varphi\sqrt{-1}}{1 - \tang\varphi\sqrt{-1}}$$

Weil aber für $\varphi = 0$ auch $\tang\varphi = 0$ ist, so erhält man für die beständige Grösse A die Gleichung

$$A = \log\frac{1}{1} = \log 1 = 0$$

Also ist $A = 0$, und folglich schlechtweg

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \tang\varphi\sqrt{-1}}{1 - \tang\varphi\sqrt{-1}}.$$

Eine sehr merkwürdige Gleichung, wovon in der Analysis der häufigste Gebrauch gemacht wird. Sie zeigt wie Kreisbogen und Logarithmen unmöglicher Grössen in Verbindung stehen, und sich gegenseitig in einander verwandeln lassen. Aber das Unmögliche rechter Hand des Gleichheitszeichens ist, wie wir in der Folge sehen werden, nur s c h e i n b a r, und das Unmögliche verschwindet, wenn man den Logarithmen der angegebenen Grösse in eine Reihe verwandelt, und sie mit $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ multiplicirt. M. s. unten (§. 74. Beyspiel III. 6).

1. Man kann dieser Gleichung noch verschiedene andere Formen geben, wenn man

tang

$\tang \varphi = \frac{C}{B}$ setzt. Dann ist nemlich

$\varphi = \text{Arc tang } \frac{C}{B}$ und folglich

$$\text{Arc tang } \frac{C}{B} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{B + C\sqrt{-1}}{B - C\sqrt{-1}}$$

wo B und C jede Zahlen bedeuten können.

2. Auch ist dieser Ausdruck identisch mit folgenden:

$$\text{Arc tang } \frac{C}{B} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{B\sqrt{-1} - C}{B\sqrt{-1} + C}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{B\sqrt{-1} + C}{B\sqrt{-1} - C}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{B\sqrt{-1} + C}{B\sqrt{-1} - C}$$

3. Dann ist auch wegen

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2}{\cot \varphi - \text{tang } \varphi} =$$

$$\frac{2}{\frac{B}{C} - \frac{C}{B}} = \frac{2BC}{B^2 - C^2}$$

$$2 \text{ Arc tang } \frac{C}{B} = \text{Arc tang } \frac{2BC}{B^2 - C^2};$$

mithin auch

Arc

$$\text{Arc tang}\,\frac{2BC}{B^2-C^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\frac{B+C\sqrt{-1}}{B-C\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\frac{B\sqrt{-1}-C}{B\sqrt{-1}+C}$$

4. Ein Bogen dessen Tangente $\frac{C}{B}$ ist, hat zum Sinus den Ausdruck $\frac{C}{\sqrt{(B^2+C^2)}}$ und zum Cosinus den Ausdruck $\frac{B}{\sqrt{(B^2+C^2)}}$. Daher denn die logarithmischen Ausdrücke (2) für Arc tang $\frac{C}{B}$; auch die Werthe von

Arc sin $\frac{C}{\sqrt{(B^2+C^2)}}$ und

Arc cos $\frac{B}{\sqrt{(B^2+C^2)}}$ bezeichnen.

Ein Bogen dessen Tangente $= \frac{2BC}{B^2-C^2}$ ist, hat zum Sinus die Grösse $\frac{2BC}{B^2+C^2}$, und zum Cosinus die Grösse $\frac{B^2-C^2}{B^2+C^2}$; daher sind die

die logarithmischen Ausdrücke (3) auch identisch mit Arc sin $\frac{2BC}{B^2 + C^2}$ und Arc cos $\frac{B^2 - C^2}{B^2 + C^2}$.

II. Setzt man tang $\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, so erhält man auch (I.)

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}}$$

III. Oder auch

$$\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}}.$$

IV. Man multiplicire des Bruchs wovon der Logarithme genommen ist, Zähler und Nenner in (II.) gemeinschaftlich mit $(\cos\varphi + \sin\sqrt{-1})$, so erhält man wegen

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}$$
$$= \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$$

Auch

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^2 \text{ d. h.}$$

$$\varphi = \frac{2}{2\sqrt{-1}} \log (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}). \text{ Also}$$

$$\varphi\sqrt{-1} = \log (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

Und

Und eben so aus (III.) wenn man Zähler und Nenner gemeinschaftlich mit $\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}$ multiplicirt

$$-\varphi\sqrt{-1} = \log(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

V. Nun sey e die Zahl, deren natürlicher Logarithme = 1 (§. 25.) so hat man (IV.) die Gleichungen

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$$

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}.$$

Mithin die Formeln, welche ebenfalls sehr häufig vorkommen

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

VI. Aus (IV.) wird auch, wenn n welche Zahl man will, bedeutet

$$n\varphi\sqrt{-1} = n\log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

VII. Nun bleibt aber die Gleichung (IV.)

$$\varphi\sqrt{-1} = \log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

auch richtig wenn man statt φ, den n fachen Bo-

gen also $n\varphi$ setzt, weil φ jeden Bogen überhaupt bezeichnet, mithin hat man auch

$$n\varphi\sqrt{-1} = \log(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}).$$

VIII. Demnach (VI. VII.)

$$n\log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$
$$= \log(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1})$$

oder $\log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n$

$$= \log(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1})$$

d. h. $(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n$

$$= \cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}.$$

Abermahls eine sehr wichtige Gleichung, welche zeigt wie Sinus und Cosinus des n fachen Bogens, aus dem Sinus und Cosinus des einfachen gefunden werden können.

IX. Es ist nemlich wenn φ negativ gesetzt wird, auch

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi\sqrt{-1}$$

weil die Sinusse negativer Bogen negativ werden, die Cosinusse aber positiv bleiben.

X. Demnach aus (VIII. IX.)

$$\frac{(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n + (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n}{2}$$
$$= \cos n\varphi.$$

(cos

$$\frac{(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n - (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$
$$= \sin n\varphi.$$

Wo n jede ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann.

XI. Es sey z. B. $n = 3$, so erhält man

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi^3 - 3\cos\varphi \sin\varphi^2$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos\varphi^2 \sin\varphi - \sin\varphi^3$$

Diese und mehr andere Sätze die jetzt nicht hieher gehören, werden sonst auch wohl auf andere Art erwiesen, aber nicht in der Allgemeinheit, in der hier n jede ganze gebrochene oder verneinte Zahl bedeuten kann.

XII. Man setze in (I) den Bogen $\varphi =$ einem Vielfachen des Halbkreises π also $= k\pi$, so ist $\tang\varphi = \tang k\pi = 0$; demnach

$$2k\pi\sqrt{-1} = \log\frac{1}{1} = \log 1.$$

Es hat also log 1 unzählig viele Werthe, weil weil k jede ganze Zahl bedeuten kann; aber alle diese Werthe sind unmöglich, und nur der einzige, nemlich für $k = 0$ ist möglich, nemlich für $k = 0$ ist $2k\pi\sqrt{-1}$ auch $= 0$, mithin $\log 1 = 0$, wie bekannt.

Weil

Weil nun $\log b = \log b \,.\, 1 = \log b + \log 1$; so ist, wenn $\log b = L$ genannt wird $\log b = L + 2 k \pi \sqrt{-1}$.

Also hat auch der Logarithme einer jeden andern Zahl b unzählig viele Werthe, aber nur den einzigen möglichen nemlich für $k = 0$, wo dann der unmögliche Theil $2 k \pi \sqrt{-1}$ verschwindet, und $\log b = L$ wird.

XIII. Setzt man in (I) φ negativ und zwar $= - k \pi$ so hat man auch

$$- 2 k \pi \sqrt{-1} = \log 1.$$

XIV. Mithin auch

$$\log b = L - 2 k \pi \sqrt{-1}$$

Also ist überhaupt

$$\log b = L \pm 2 k \pi \sqrt{-1}.$$

XV. Setzt man in (I) $\frac{1}{\cot \varphi}$ statt $\tang \varphi$, so ist auch

$$\varphi = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \log \frac{\cot \varphi + \sqrt{-1}}{\cot \varphi - \sqrt{-1}}.$$

Ist nun $\varphi = \frac{1}{2} \pi$; oder $\frac{3}{2} \pi$ oder überhaupt $\frac{2m+1}{2} \pi$ so wird allemahl $\cot \frac{2m+1}{2} \pi = 0$;

der n-

demnach

$$(2m+1)\pi\sqrt{-1} = \log\frac{+\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}} = \log -1$$

Hier mag nun $m = 0$, oder was für eine ganze Zahl man will, seyn, so ist $\log -1$ allemahl unmöglich, und so findet man denn überhaupt $\log -b = \log b \cdot -1 = \log b + \log -1 =$
$L \pm (2m+1)\pi\sqrt{-1}$
d. h. der Logarithme einer negativen Zahl ist allemahl unmöglich, aber es sind der unmöglichen Werthe unzählige. Ist also $y = \log x$, so gehören zu jedem x unzählig viele y, d. h. y oder $\log x$ ist eine transcendentische Function von x. Dies dient zur Erläuterung von Einleitung (§. II. 2. 3.)

XVI. Weil nach (XII.) $2k\pi\sqrt{-1} = \log 1$, so hat man umgekehrt $e^{2k\pi\sqrt{-1}} = 1$. Dieser Ausdruck $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ ist hier offenbar nur scheinbar imaginär. Denn setzt man in (V) das dortige $\phi = 2k\pi$, so ist

$$e^{2k\pi\sqrt{-1}} = \cos 2k\pi + \sin 2k\pi\sqrt{-1}$$

welches wegen $\cos 2k\pi = 1$ und $\sin 2k\pi = 0$, sich in $e^{2k\pi\sqrt{-1}} = 1$ verwandelt. Hier hat man ein Beyspiel zu (Einleitung §. IX.)

Dies

Dies führt auf ein leichtes Verfahren, die Wurzeln einer Gleichung wie $x^n - a^n = 0$ zu finden.

Denn man erhält $\frac{x^n}{a^n} = 1$, also

$$\frac{x}{a} = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{e^{2k\pi\sqrt{-1}}} = e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}$$

demnach

$$x = a \, . \, e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}$$

oder wenn man in (V) $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ setzt

$$x = a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Weil aber auch k negativ gesetzt werden kann, wodurch $\cos\frac{2k\pi}{n}$ wie für ein positives k; $\sin\frac{2k\pi}{n}$ aber entgegengesetzt zu nehmen ist, so hat man auch

$$x = a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

d. h. alle Wurzeln der Gleichung $x^n - a^n = 0$ sind unter der allgemeinen Form

$$x = a\left(\cos.\,\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

enthalten, wo denn für 2 k jede gerade Zahl, welche nicht größer als n ist, genommen werden darf.

Nähme man $2k > n$, so würden wieder dieselben Werthe von x zum Vorschein kommen, welche man für $2k < n$ erhalten hatte, daher man $2k$ nie $> n$ nimmt.

Es sey z. B. $x^5 - a^5 = 0$, so erhält man für

$k = 0$ d. Wurzel $x = a$

$k = 1 \;.\;.\;.\; x = a\left(\cos\frac{2}{5}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2}{5}\pi\right)$

$k = 2 \;.\;.\;.\; x = a\left(\cos\frac{4}{5}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4}{5}\pi\right).$

Wollte man nun z. B. $k = 3$, also $\frac{2k}{n} = \frac{6}{5}$ nehmen, so würden, weil $\cos\frac{6}{5}\pi = \cos\frac{4}{5}\pi$; und $\sin\frac{6}{5}\pi = -\sin\frac{4}{5}\pi$, wieder eben die Wurzeln x zum Vorschein kommen, welche man für $k = 2$ erhalten hatte, und so ferner für $k = 4$ eben die Wurzeln, welche man für $k = 1$ erhalten hatte u. s. w. Die Gleichung $x^5 - a^5 = 0$ hat also keine anderen Wurzeln, als die 5, welche sich für $k = 0$; 1; 2; ergeben hatten.

Für $x^6 - a^6 = 0$, würde man eben so die Wurzeln

$$x = a$$

$$x = a\left(\cos\frac{2}{6}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{6}\pi\right)$$

$$x = a\left(\cos\frac{4}{6}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{4}{6}\pi\right)$$

$$x = a\left(\cos\frac{6}{6}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{6}{6}\pi\right).$$

Oder auch

$$x = a$$

$$x = a\left(\cos\frac{1}{3}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{3}\pi\right)$$

$$x = a\left(\cos\frac{2}{3}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$x = -a$$

(wegen $\cos\frac{6}{6}\pi = \cos\pi = -1$ und $\sin\frac{6}{6}\pi = \sin\pi = 0$) erhalten.

XVII. Auf eine ähnliche Art kann man die Wurzeln der Gleichung $x^n + a^n = 0$ finden. Denn man erhält jetzt

$$\frac{x}{a} = \sqrt[n]{-1}.$$

Aber $-1 = e^{\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}}$ (XV).

Demnach

$$x = a\, e^{\pm \frac{2k+1}{n} \pi \sqrt{-1}}$$

d. h. wenn man jetzt in (V) $\varphi = \pm \frac{2k+1}{n} \pi$ setzt

$$x = a \left(\cos \frac{2k+1}{n} \pi \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k+1}{n} \pi \right)$$

wo jetzt für $2k+1$ jede ungerade Zahl, die nicht größer als n ist, gesetzt werden kann.

XVIII. Hieraus ergiebt sich denn weiter, daß ein Ausdruck wie $x^n - a^n$ einfache Factoren von der Form

$$x - a \left(\cos \frac{2k}{n} \pi + \sqrt{-1} \sin \frac{2k}{n} \pi \right)$$

und $$x - a \left(\cos \frac{2k}{n} \pi - \sqrt{-1} \sin \frac{2k}{n} \pi \right)$$

d. h. quadratische oder vielmehr dreytheiligte Factoren von der Form

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2k}{n} \pi + a^2$$

haben wird, weil dieser quadratische Ausdruck das Produkt aus den angeführten einfachen Factoren ist.

Hiebey

Hiebey ist jedoch zu bemerken, daß für $k = 0$ kein quadratischer Factor, sondern nur ein einfacher $x - a$ zu setzen ist, wie z. B. $x^5 - a^5$ in (XVI) bloß die Factoren $x - a$;

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2}{5} \pi + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos \frac{4}{5} \pi + a^2$$

haben kann.

Ist n gerade, so ist für $2k = n$ auch kein quadratischer Factor, sondern bloß ein einfacher $x + a$ zu setzen. So hat z. B. $x^6 - a^6$ in (XVI) bloß die Factoren.

$$x - a$$

$$x^2 - 2ax \cos \frac{1}{3} \pi + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2}{3} \pi + a^2$$

$$x + a$$

wo denn freylich statt $(x - a)(x + a)$ auch ein quadratischer $x^2 - a^2$ gesetzt werden könnte, der aber nicht mit den dreytheiligten von der allgemeinen Form $x^2 - 2ax \cos \frac{2k}{n} \pi + a^2$ zu einer Classe gehört.

XIX.

XIX. Für einen Ausdruck wie $x^n + a^n$ würden die einfachen Factoren seyn

$$x - a\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$x - a\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

die dreytheiligten Factoren von $x^n + a^n$ würden denn unter der Form

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2k+1}{n}\pi + a^2$$

enthalten seyn, wobey aber zu merken ist, daß wenn n ungerade ist, für $2k+1=n$ kein quadratischer, sondern blos der einfache Factor $x+a$ genommen werden muß.

§. 49.

Von den höhern Differenzialen.

Erklärung. I. Wenn Z eine Funktion von x, also $dZ = Pdx$, oder $P = \frac{dZ}{dx}$ ist, so kann man, falls die abgeleitete Function P nicht etwa eine beständige Größe ist, solche auch wieder differenziiren. Findet man nun $dP = Qdx$, und ist Q auch noch veränderlich, so kann man ferner Q wieder differenziiren, und dieß Verfahren, so weit es angeht, fortsetzen.

Ist nun auf diese Art

$$dZ = Pdx$$
$$dP = Qdx$$
$$dQ = Rdx \quad \text{u. s. w.}$$

so nennt man P die erste abgeleitete Funktion von Z; Q die zweyte abgeleitete, R die dritte u. s. w. (Prèmiere fonction derivée; seconde fonction derivée u. s. w.)

II. Da man bey allen diesen Differenziationen das dx immer gleich groß, also als unveränderlich ansiehet, so ist, wenn man Pdx als ein Produkt aus einer veränderlichen Größe P in eine unveränderliche dx betrachtet, das Differenzial von Pdx = dP . dx; weil aber Pdx selbst schon das Differenzial von Z ist, so wird das Differenzial von Pdx das Differenziodifferenzial oder das zweyte Differenzial von Z genannt, und durch ddZ, oder d^2Z angezeigt, in welchem Ausdrucke man denn das d^2 nicht, wie sonst, mit der Bezeichnung eines Quadrats verwechseln darf.

III. Also hat man

$$ddZ = dP . dx = Qdx^2$$

oder $$Q = \frac{ddZ}{dx^2}$$

IV.

IV. Nun kann man aber in dem Ausdrucke Qdx^2 das Q, wenn es die veränderliche Größe x enthält, wieder als einen veränderlichen Factor behandeln, und Qdx^2 abermahls differenziiren, indem dx^2 als unveränderlich angesehen wird. Dann wird dieses Differenzial das dritte Differenzial von Z genannt, und durch $dddZ$, oder d^3Z angezeigt. Es ist also

$$d^3Z = dQdx^2 = Rdx^3$$

Mithin $R = \frac{d^3Z}{dx^3}$

Und so ferner wenn $dR = Sdx$ ist

$$S = \frac{d^4Z}{dx^4}$$

u. s. w.

Die Ausdrücke d^2Z, d^3Z, $d^4Z \ldots d^nZ$ bedeuten also fortgesetzte Differenziationen von Z, höhere Differenziale von Z, wobey denn dx immer als unveränderlich behandelt wird.

V. Da in dem Ausdrucke

$$\frac{ddZ}{dx^2} = Q$$

Q eine endliche Größe ist, so erhellet, daß das dx^2 oder das Quadrat des Differenzials dx, als ein unendlich kleines von einer höhern Ordnung, dennoch

noch mit dem Differenziodifferenzial ddZ von einerley Ordnung seyn wird, weil sonst beyde in einander dividirt, keine endliche Größe Q zum Quotienten geben könnten; denn wäre Q z. B. selbst ein unendlich Kleines, so wäre in der Proportion

$$ddZ : dx^2 = Q : 1$$

ddZ gegen dx^2 ein unendlich Kleines, weil Q gegen 1 ein unendlich Kleines ist. Also müßte ddZ ein unendlich Kleines von einer höhern Ordnung als dx^2 seyn (§. 1. XXIX.). Wäre aber dagegen Q unendlich groß, so würde auch ddZ gegen dx^2 unendlich groß, also ddZ ein unendlich Kleines von einer niedrigern Ordnung als dx^2 seyn. Also muß ddZ nothwendig als ein unendlich Kleines von einerley Ordnung mit dx^2 betrachtet werden.

Auf dieselbe Art erhellet, daß auch d^3Z und dx^3 als unendlich Kleine von einerley Ordnung zu betrachten sind. Und so überhaupt d^nZ und dx^n.

Beyspiel. Es sey $Z = (a + bx)^n . Fx$, wo Fx welche Funktion von x man will bedeute, so ist

$$dZ = (a + bx)^n dFx + nbdx (a + bx)^{n-1} Fx$$

demnach P oder

$$\frac{dZ}{dx} = (a + bx)^n \frac{dFx}{dx} + nb (a + bx)^{n-1} Fx$$

Nennt

Nennt man also den Differenzialquotienten $\frac{dFx}{dx} = F'x$ wo $F'x$ wieder eine Funktion von x seyn wird, so hat man

$$P = \frac{dZ}{dx} = \left((a+bx)F'x + nbFx\right)(a+bx)^{n-1}$$

oder wenn man die Funktion $(a+bx)F'x + nbFx$ mit fx bezeichnet

$$P = \frac{dZ}{dx} = (a+bx)^{n-1} fx.$$

Ein Ausdruck, welcher dem anfänglich für Z vorgegebenen völlig ähnlich ist, nur daß fx statt Fx steht, und statt $(a+bx)^n$ die nächstniedrigere Potenz $(a+bx)^{n-1}$.

Differenzirt man nun weiter, und setzt auf eine ähnliche Art

$\frac{dfx}{dx} = f'x$, und $(a+bx)f'x + nbfx = \varphi x$,

so erhält man

$$Q = \frac{dP}{dx} = \frac{d^2Z}{dx^2} = (a+bx)^{n-2} \varphi x.$$

Ein Ausdruck, welcher dem für Z vorgegebenen abermahls ähnlich ist, nur daß jetzt φx statt Fx, und $(a+bx)^{n-2}$ statt $(a+bx)^n$ steht.

Setzt

Setzt man diese Rechnung weiter fort, so werden die folgenden Differenzialquotienten $\frac{d^3Z}{dx^3}$, $\frac{d^4Z}{dx^4}$, ꝛc. immer eine niedrigere Potenz von $a+bx$ enthalten, und so ist denn durch dieses Beyspiel zugleich der Satz erwiesen, daß wenn eine Funktion Z von x, einen Factor wie z. B. $a+bx$, n mahl enthält, auch alle folgenden Differenziale $\frac{dZ}{dx}$ $\frac{d^2Z}{dx^2}$ ꝛc. diesen Factor enthalten, daß aber die Zahl dieser Factoren immer um 1 abnimmt, bis endlich $\frac{d^nZ}{dx^n}$ den Factor $a+bx$ gar nicht mehr enthalten wird.

VI. Wenn wir bey den fortgesetzten Differenziationen von Z das Differenzial dx als unveränderlich betrachtet haben, so sieht man doch leicht, daß dies keine nothwendige Voraussetzung ist, sondern in den zu differenziirenden Produkten Pdx, Qdx u. s. w. das Differenzial dx auch wieder als veränderlich behandelt werden kann, so daß auch von diesem sich wieder Differenziale ddx, d^3x u. s. w. gedenken lassen, unter welcher Voraussetzung denn obige Ausdrücke $P\,dx$, $Q\,dx$ u. s. w. völlig nach der

der Art, wie Produkte aus zwey veränderlichen Factoren, zu differenziiren sind. (§. 8.)

VII. Für diesen Fall erhält man demnach

$$ddZ = dP \cdot dx + Pddx.$$

Oder wegen $dP = Qdx$

$$ddZ = Qdx^2 + Pddx.$$

In welcher differenziodifferenzial-Gleichung die unendlich kleinen Größen ddZ, dx^2, ddx, als von einerley Ordnung zu betrachten sind.

VIII. Wird die Gleichung (VII.) auf beyden Seiten von neuen differenziirt, so ergiebt sich nach der Art, wie das in dem Ausdrucke Qdx^2 vorkommende Quadrat der veränderlichen Größe dx nach (§. 4.) zu differenziiren seyn würde

$$d^3Z = dx^2 \cdot dQ + 2Qdx \cdot ddx + ddxdP + Pd^3x$$

oder statt dQ, dP die Werthe (I) substituirt

$$d^3Z = Rdx^3 + 3Qdxddx + Pd^3x.$$

In welcher Differenzialgleichung vom dritten Grade denn d^3Z; dx^3; $dxddx$; d^3x auch wieder als unendlich Kleine von einerley Ordnung zu betrachten sind.

Auf diese Weise kann man weiter fortfahren, und d^4Z, d^5Z rc. erhalten, wenn es zu einem Gebrauche erforderlich seyn sollte. Ein Beyspiel wird hinlänglich seyn, das bisherige zu erläutern.

IX.

IX. Es sey also $Z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ so hat man

$$P = \frac{dZ}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2$$

$$Q = \frac{dP}{dx} = 2C + 6Dx$$

$$R = \frac{dQ}{dx} = 6D.$$

Diese Werthe also in die Gleichungen (VII. VIII.) substituirt geben

$$ddZ = (2C + 6Dx)\,dx^2 + (B + 2Cx + 3Dx^2)\,ddx$$

$$d^3Z = 6D\,dx^3 + 3(2C + 6Dx)\,dx\,ddx + (B + 2Cx + 3Dx^2)\,d^3x.$$

X. Betrachtete man aber dx als eine constante Größe, so erhielte man $ddx = 0$; $d^3x = 0$, und schlechtweg

$$\frac{dZ}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 = P$$

$$\frac{ddZ}{dx^2} = 2C + 6Dx = Q$$

$$\frac{d^3Z}{dx^3} = 6D = R.$$

XI.

XI. Man sieht also, daß Ausdrücke wie $\frac{ddZ}{dx^2}$, $\frac{d^3Z}{dx^3}$ u. s. w. auch gewisse Funktionen von x bezeichnen, so bald Z eine dergleichen Funktion ist; und daß wenn man diese Ausdrücke jenen Funktionen gleich setzt, dies weiter nichts sagen will, als daß sie sich denselben nur ohne Ende immer mehr und mehr nähern, je kleiner man dx nimmt, so wie es im vorhergehenden von $\frac{dZ}{dx} = P$ gezeigt worden ist. Die Ausdrücke $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{ddZ}{dx^2}$ u. s. w. erhalten denn schlechtweg die Werthe P, Q, u. s. w. (X), wenn man das dx in allen Differenziationen, sich immer gleich bleiben läßt, und also in so fern als eine constante Größe betrachtet.

XII. Läßt man aber das unendlich abnehmende dx nicht immer sich gleich verbleiben, während man die Funktion Z zu wiederhohlten mahlen differenziirt, gedenkt man sich also, daß die veränderliche Größe x, nicht immer um ein gleich großes differenzial dx sich ändert, sondern dies Differenzial selbst wieder veränderlich ist, dann kommen auch die Differenziale dieses Differenzials, d. h. auch

die Werthe von ddx, d^3x u. s. w. in Betrachtung, und dann ist z. B. $\frac{ddZ}{dx^2}$ nicht mehr schlechtweg der Funktion Q (X) gleich, sondern es ist alsdann in (VII.)

$$\frac{ddZ}{dx^2} = Q + P . \frac{ddx}{dx^2}$$

d. h. es hängt der Quotient $\frac{ddZ}{dx^2}$ nunmehr auch zugleich von P, und von dem Verhältnisse ddx zu dx^2, oder von dem endlichen Werthe des Quotienten $\frac{ddx}{dx^2}$ ab, oder vielmehr von dem Werthe, dem dieser Quotient sich ohne Ende immer mehr und mehr nähern würde.

XIII. Dies alles wird noch deutlicher werden, wenn wir statt unendlich kleine Differenzen, erst endliche Differenzen setzen.

Es sey also die Funktion $Z = A + Bx + Cx^2$, so ist, wenn wir erstlich x um Δx; und folglich Z um ΔZ sich ändern lassen

$$Z + \Delta Z = A + B(x + \Delta x) + C(x + \Delta x)^2.$$

Oder

$$\Delta Z = (B + 2Cx)\,\Delta x + C\,(\Delta x)^2.$$

Hier

Hier nähert sich also erstlich der Quotient

$\frac{\Delta Z}{\Delta x}$ ohne Ende dem Werthe $B + 2Cx$,

d. h. es ist $\frac{dZ}{dx} = B + 2Cx$ der Differenzial-quotient wie gewöhnlich.

XIV. Nun lasse man aber in der (XIII) erhaltenen Differenzgleichung

$$\Delta Z = (B + 2Cx)\,\Delta x + C\,(\Delta x)^2$$

sich x wieder um Δx ändern, so ändert sich ΔZ um $\Delta\Delta Z$. Läßt man nun erstlich dies Δx eben den Werth haben, den es in (XIII.) hatte, und läßt es also unverändert, d. h. constant, so ist für diesen Fall

$$\Delta Z + \Delta\Delta Z = B\Delta x + 2C(x + \Delta x)\,\Delta x + C\,(\Delta x)^2$$

und folglich, wenn man von dieser geänderten Gleichung die erstere abzieht

$$\Delta\Delta Z = 2C\,.\,(\Delta x)^2.$$

Mithin der Differenzdifferenz-quotient

$$\frac{\Delta\Delta Z}{(\Delta x)^2} = 2C$$

oder wenn man die Differenzen unendlich klein sich gedenkt, der Differenziodifferenzial-quotient

$$\frac{ddZ}{dx^2} = 2C.$$

XV.

XV. Jetzt wollen wir aber das x in (XIV.) nicht um dieselbe Differenz wie in (XIV.) sich ändern lassen, sondern um eine andere $= \Delta x + \Delta\Delta x$; wo demnach $\Delta\Delta x$ ausdrücke, um wie viel das jetzige Δx größer als das vorige ist. Dann betrachtet man also das Δx in (XIV.) selbst als veränderlich, und erhält dann für diesen Fall

$$\Delta Z + \Delta\Delta Z = B(\Delta x + \Delta\Delta x) + 2C(x + \Delta x + \Delta\Delta x)(\Delta x + \Delta\Delta x) + C(\Delta x + \Delta\Delta x)^2.$$

Entwickelt man nun die Produkte rechter Hand des Gleichheitszeichens, und ziehet von der erhaltenen Gleichung die erstere (XIV.)

$$\Delta Z = B\Delta x + 2Cx\Delta x + C(\Delta x)^2$$

ab, so erhält man, wenn zuletzt alles mit $(\Delta x)^2$ dividirt wird

$$\frac{\Delta\Delta Z}{(\Delta x)^2} = 2C + (B + 2Cx + 6C\Delta x + 3C\Delta\Delta x)\frac{\Delta\Delta x}{(\Delta x)^2}.$$

XVI. In diesem Ausdrucke nähert sich nun der in $\frac{\Delta\Delta x}{(\Delta x)^2}$ multiplicirte Factor, ohne Ende immer mehr und mehr dem Werthe $B + 2Cx$, je kleiner man Δx, und folglich auch $\Delta\Delta x$ nimmt, und wenn man daher Δx und $\Delta\Delta x$ unendlich klein wer-

den, d. h. sich in die Differenziale dx, ddx verwandeln läßt, in welchem Falle sich denn $\Delta\Delta Z$ in das Differenziodifferenzial verwandelt, so hat man

$$\frac{ddZ}{dx^2} = 2C + (B + 2Cx)\frac{ddx}{dx^2}$$

d. h. $\frac{ddZ}{dx^2}$ nähert sich ohne Ende dem Werthe rechter Hand des Gleichheitszeichens, und diese unendliche Annäherung will man durch das Zeichen $=$ selbst andeuten.

XVII. So könnte man also aus der Betrachtung, daß man die Differenzen alle zuerst blos endlich annähme, und sie nun in den erhaltenen Formeln allmählig immer mehr abnehmen oder unendlich klein werden ließe, alle Vorschriften für die Verhältnisse der höhern Differenziale ableiten. Aber die Rechnung wird unstreitig kürzer, wenn man die Formeln für die höhern Differenzialverhältnisse, sogleich auf die Betrachtung des unendlich Kleinen gründet, so wie z. B. das Verfahren (IX) (das dortige $D = 0$ gesetzt) sogleich

$$\frac{ddZ}{dx^2} = 2C + (B + 2Cx)\frac{ddx}{dx^2}$$

giebt, wie in (XVI).

XVIII.

XVIII. Indessen erhellet aus der Betrachtung der endlichen Differenzen nunmehr noch deutlicher, wie auch Ausdrücke von der Form $\frac{ddZ}{dx^2}$; $\frac{ddx}{dx^2}$ ebenfalls nur gewisse Gränzverhältnisse oder Gränzquotienten bezeichnen wollen, oder daß sie die Werthe von $\frac{\Delta\Delta Z}{\Delta x^2}$; $\frac{\Delta\Delta x}{\Delta x^2}$ darstellen, für den Fall, daß die endlichen Differenzen unendlich klein werden, oder wenn man will, sich der Null ohne Ende immer mehr und mehr nähern. Und so würden denn Ausdrücke wie $\frac{d^3Z}{dx^3}$; $\frac{d^3Z}{dx\,ddx}$; $\frac{d^3Z}{d^3x}$; $\frac{dx\,ddx}{dx^3}$, dergleichen man z. B. aus (IX) ableiten könnte, auf eine ähnliche Art zu verstehen seyn.

XIX. Der Bequemlichkeit wegen, werden aber Gleichungen zwischen solchen Gränzquotienten nicht wie z. B. in (XVII) geschrieben, sondern kürzer wie in (VIII) als Gleichungen zwischen den Differenzialen selbst dargestellt, wiewohl der wahre Zweck der Differenzialrechnung immer nur auf das Verhalten der Gränzquotienten, als endlicher Größen, hingerichtet seyn kann. Denn es ist klar, daß nur dadurch die Differenzialgleichungen eine bestimmte Bedeutung erhalten, da hingegen die Differenziale

selbst, als unendlich kleine, oder immerfort abnehmende Größen, an und für sich nicht bestimmt angegeben, sondern bey ihrer unendlichen Abnahme nur in ihren gegenseitigen Verhältnissen betrachtet werden können, deren Exponenten denn bestimmte endliche Größen sind.

§. 50.

Zusatz. Aus dem bisherigen ergiebt sich aber nun zugleich noch eine andere wichtige Betrachtung. Soll nemlich eine Differenzialgleichung wie (§. 49. IX.) oder vielmehr wie (§. 49. XVII.) eine bestimmte Bedeutung haben, so muß nothwendig angegeben seyn, in welchem Verhältnisse ddx zu dx^2 stehe; dann weiß man auch was ddZ zu dx^2 für ein Verhältniß haben wird, und umgekehrt, d. h. man muß das Gesetz angeben, nach welchem dx in (§. 49. VI.) variabel gesetzt wird, um daraus ableiten zu können, was $\frac{ddZ}{dx^2}$ für eine bestimmte endliche Funktion seyn wird. Einige Beyspiele werden dieses erläutern.

I. Beyspiel. Gesetzt dx (§. 49. XVII) solle eine unveränderliche Größe seyn, d. h. bey den höhern Differenziationen sich immer gleich verbleiben, so ist ddx

=

$= 0$ zu setzen, wodurch denn der Quotient $\frac{ddx}{dx^2}$ ebenfalls $= 0$ wird. Unter dieser Voraussetzung wird der Quotient $\frac{ddZ}{dx^2}$ schlechtweg $= 2C$, und hat also hiedurch einen bestimmten Werth, da er hingegen zuvor da $\frac{ddx}{dx^2}$ noch unbestimmt war, eine ebenfalls vage und unbestimmte Bedeutung hatte.

II. Beyspiel. Gesetzt aber, es solle dx nicht constant, sondern selbst veränderlich seyn, so ist ddx nicht $= 0$, mithin auch $\frac{ddx}{dx^2}$ nicht $= 0$. Man nehme aber an, es solle allemahl $ddx = adx^2$, oder $\frac{ddx}{dx^2} = a$ einer constanten Größe gleich seyn. Dann wird $\frac{ddZ}{dx^2}$ nicht mehr unbestimmt bleiben, sondern die bestimmte Funktion $2C + (B + 2Cx)a$ oder $2C + Ba + 2Cax$ bezeichnen.

III. Beyspiel. Oder wäre $ddx = Xdx^2$, wo X, welche Funktion von x man will bezeichne, so ist die nunmehr ebenfalls bestimmte Funktion

$$\frac{ddZ}{dx^2} = 2C + (B + 2Cx).X.$$

IV.

IV. Beyspiel. Es könnte aber auch angegeben werden, was $\frac{ddZ}{dx^2}$ für einen bestimmten Werth erhalten soll, dann wird sich daraus ableiten lassen, in welchem Verhältnisse ddx zu dx^2 wird stehen müssen.

Sollte z. B. $\frac{ddZ}{dx^2} = x$ werden, so hat man die Gleichung

$$x = 2C + (B + 2Cx)\frac{ddx}{dx^2}.$$

Woraus die bestimmte Funktion

$$\frac{ddx}{dx^2} = \frac{x - 2C}{B + 2Cx}$$

folgt, d. h. es wird ddx zu dx^2 allemahl in dem Verhältnisse $x - 2C : B + 2Cx$ genommen werden müssen, wenn $\frac{ddZ}{dx^2} = x$ werden soll.

Und so in andern Fällen.

§. 51.

I. Die bisherigen Betrachtungen lassen sich leicht auf alle Ausdrücke anwenden, worinn höhere Differenzialquotienten vorkommen. Z. B. ein Ausdruck wie $\frac{x^3 d^3 x}{dx\, ddx}$ hat keinen bestimmten Werth,

wenn

wenn nicht angegeben wird, was $\frac{d^3x}{dx^3}$ und $\frac{dx^2}{ddx}$, oder $\frac{ddx}{dx^2}$ für bestimmte Funktionen sind, weil der angegebene Ausdruck sich auch in folgender Form $x^3 \cdot \frac{d^3x}{dx^3} \cdot \frac{dx^2}{ddx}$ darstellen läßt.

Da indessen die höhern Differenzialquotienten von den niedrigern abhängen, so sind jene bestimmt, so bald diese auf irgend eine Weise angegeben werden. Man darf also nur angeben, was $\frac{ddx}{dx^2}$ für eine Funktion von x seyn soll, so wird sich daraus auch finden, was $\frac{d^3x}{dx^3}$ für eine Funktion von x ist.

Es sey z. B. allgemein $\frac{ddx}{dx^2} = X$, und X welche Funktion von x man will, so ist

$$ddx = Xdx^2.$$

Und folglich, wenn man auf beyden Seiten differenziirt

$$d^3x = 2Xdxddx + dx^2 . dX.$$

Wenn in diese Gleichung statt ddx der Werth Xdx^2, und $dX = Wdx$ gesetzt wird, wo W sich

sich durch die Differenziirung der Funktion X ergiebt, so erhält man

$$d^3x = 2X^2dx^3 + Wdx^3.$$

Mithin $\frac{d^3x}{dx^3} = 2X^2 + W$, d. h. die Funktion welche durch $\frac{d^3x}{dx^3}$ angezeigt wird, ist jetzt in endlichen Größen dargestellt, und der ganze Differenzial-Ausdruck $\frac{x^3 d^3x}{dx^3}$ oder $x^3 \cdot \frac{d^3x}{dx^3} \cdot \frac{dx^2}{ddx}$ erhält jetzt den bestimmten endlichen Werth

$$\frac{x^3(2X^2 + W)}{X}.$$

II. Sehr oft pflegt man die Gleichung zwischen ein paar Differenzialen wie z. B. zwischen ddx und dx^2 (in I) auch dadurch bestimmen, daß man das Differenzial einer beliebigen Funktion von x als unveränderlich annimmt. So z. B. wenn das Differenzial von x^2 unveränderlich, also $d(x)^2$ d. h. $2xdx = a$ gesetzt würde, erhielte man durch abermahlige Differenziation

$$2xddx + 2dx^2 = 0$$

oder

$$ddx = -\frac{dx^2}{x}.$$

Dies hieße denn so viel als in (I) den Werth von

X

$X = -\frac{1}{x}$ annehmen, wodurch denn $\frac{x^3 d^3 x}{dx\, ddx}$ den bestimmten Werth $-3x^2$ erhält, wegen

$$W = \frac{1}{x^2}.$$

Man sieht hieraus, daß es einerley ist, für $\frac{ddx}{dx^2}$ sogleich eine bestimmte Funktion anzunehmen, oder diese erst dadurch zu bestimmen, daß man das Differenzial irgend einer Funktion von x unveränderlich setzt.

§. 52.

Wenn Z (§. 49. I) eine Funktion von zwey veränderlichen Größen y und x ist, so kann man die höhern Differenziale auf folgende Art erhalten.

Erstlich ist

$$dZ = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy \quad (§. 17.)$$

Und wenn man nun weiter differenziirt,

$$ddZ = \mathfrak{P}ddx + dx d\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}ddy + dy d\mathfrak{Q}.$$

Weil aber nun $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ wieder Funktionen von x, y sind, wenn sie nicht vermöge der Beschaffenheit der Funktion Z etwa constante Größen werden, so erhält man

$$d\mathfrak{P} = \pi dx + \varrho dy$$
$$d\mathfrak{Q} = \pi' dx + \varrho' dy,$$

wo

wo π, π'; ϱ, ϱ' auch wieder Funktionen von x, y seyn können.

Dies giebt demnach

$$ddZ = \mathfrak{P}ddx + \pi dx^2 + \varrho' dy^2 + (\varrho + \pi') dydx + \mathfrak{Q}ddy.$$

Oder

$$\frac{ddZ}{dx^2} = \mathfrak{P}\frac{ddx}{dx^2} + \pi + \varrho'\frac{dy^2}{dx^2} + (\varrho + \pi') . \frac{dy}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{ddy}{dx^2}.$$

Hier erhellet also gleichfalls, daß die einzelnen Differenzialquotienten

$\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddx}{dx^2}$; $\frac{ddy}{dx^2}$ als gegeben angesehen werden müssen, wenn der Differenzialquotient $\frac{ddZ}{dx^2}$ einen bestimmten Werth erhalten soll.

Es ist unnöthig das Verfahren für noch höhere Differenziale, oder auch wenn Z eine Funktion von noch mehr veränderlichen Größen wäre, hier auseinander zu setzen.

§. 53.

I. Indessen ersiehet man, wie man auf dem Wege der Differenziation auf allerley Differenzialausdrücke gelangen kann, die keine bestimmte Werthe haben, wenn nicht andere als bestimmt angesehen werden. Gesetzt man sey z. B. durch irgend eine

Aufgabe auf einen Differenzialquotienten von der Form $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ gekommen, so ist klar, daß dieser keinen bestimmten Werth haben kann, wenn nicht 1) y eine Funktion von x ist, wodurch also die Differenziale von y in einem bestimmten Verhältnisse gegen die Differenziale von x stehen, und 2) nicht das Differenzial einer beliebigen Funktion von x als unveränderlich angesehen wird, wie (§. 51. II).

II. Setzt man in dem obigen Ausdrucke, daß y eine Funktion von x ist, so hat man erstlich $dy = pdx$; mithin $ddy = pddx + dxdp = pddx + qdx^2$, wenn $dp = qdx$ gesetzt wird.

III. Diese Werthe in obigen Ausdruck substituirt, geben

$$\frac{yddx - xddy}{dxdy} = \frac{y - px}{p} \frac{ddx}{dx^2} - \frac{qx}{p}.$$

Hier muß also $\frac{ddx}{dx^2}$ entweder unmittelbar gegeben, oder aus einem gewissen Differenzial, welches man constant setzt, bestimmt werden (§. 51. II), wenn der vorgegebene Ausdruck eine bestimmte Bedeutung erhalten soll.

IV.

IV. Setzte man also z. B. wie (§. 51. II) das Differenzial von x^2 constant, also $\frac{ddx}{dx^2} = -\frac{1}{x}$, so hätte man $\frac{yddx - xddy}{dxdy} = \frac{px - y}{px} - \frac{qx}{p}$ also einer bestimmten Funktion von x gleich, weil y, p, q Funktionen von x sind. Aber für jede andere Funktion von y würde freylich dieser Ausdruck auch einen anderen Werth erhalten.

V. Würde dagegen das Differenzial ydx constant gesetzt, so ist, wenn man differenziirt, $yddx + dxdy = 0$. Also $yddx + pdx^2 = 0$, d. h. $\frac{ddx}{dx^2} = -\frac{p}{y}$. Mithin jetzt

$$\frac{yddx - xddy}{dydx} = -\frac{y - px}{y} - \frac{qx}{p}.$$

Wieder einer bestimmten Funktion von x gleich, und so in andern Fällen.

§. 54.

I. In manchen Fällen braucht man gar kein Differenzial als unveränderlich anzunehmen, so daß also die zweyte Bedingung in (§. 53. I) ganz wegfallen kann, und dennoch erhält der Differenzialausdruck einen bestimmten Werth. Dies ist z. B. der

der Fall in (§. 53. III), wenn $y - px = 0$, wodurch der unbestimmte Theil $\frac{y - px}{p} \frac{ddx}{dx^2}$ ganz wegfällt.

II. Ein anderes Beyspiel giebt die Formel

$$\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$$

Verfährt man mit dieser wie in §. 53. II., so wird $dyddx = pdxddx$; $dxddy = pdxddx + qdx^3$; also $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3} = -q$, d. h. einem bestimmten von der Funktion y abhängigen Werthe $-q$ gleich, ohne daß es nöthig wäre, irgend ein Differenzial constant anzunehmen, begreiflich, weil in den Werthen von $dyddx$ und $dxddy$ das gemeinschaftliche Glied $pdxddx$ vorhanden ist, welches bey der Subtraktion sich aufhebt.

§. 55.

In dem letztern Falle (§. 54. II) ist es also gleichgültig, was man für ein Differenzial constant annehmen will, ja man braucht gar keines constant zu setzen, und die Formel behält immer den von der Funktion y abhängigen Werth $-q$.

Um dies mit einem Beyspiele zu erläutern, so sey $y = x^3$. Dann ist

I. Wenn gar kein Differenzial constant angenommen wird

$$dy = 3x^2dx$$
$$ddy = 3x^2ddx + 6xdx^2.$$

Also die Formel

$$\frac{dyddx - dxddy}{dx^3} = \frac{3x^2dxddx - 3x^2dxddx - 6xdx^3}{dx^3} = -6x$$

Wo denn dieses 6x der Werth von q ist; weil $q = \frac{dp}{dx}$ und p wegen $dy = 3x^2dx$ gleich $3x^2$ ist.

II. Wenn das Differenzial dx constant angenommen wird, dann ist $ddx = 0$, und die Formel heißt dann schlechtweg

$$-\frac{ddy}{dx^2} = -6x.$$

III. Wenn das Differenzial dy constant genommen wird, so hat man $ddy = 0$, d. h. $3x^2ddx + 6xdx^2 = 0$, oder

$$ddx = -\frac{2dx^2}{x};$$

und die Formel heißt dann

$$\frac{dyddx}{dx^3} = -\frac{3x^2dx \,.\, 2dx^2}{x \,.\, dx^3} \text{ wieder} = -6x.$$

IV. Ueberhaupt sieht man leicht, daß welches Differenzial man auch constant annehmen mag, um

dar-

daraus ddx zu bestimmen, dies auf den Werth der Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ nicht den geringsten Einfluß haben kann, weil die zwey Glieder, worinn ddx vorkömmt, in dem (I) entwickelten Ausdrucke dieser Formel sich immer gegen einander aufheben.

§. 56.

So ist es denn auch klar, daß wenn eine Differenzialformel z. B. §. 53. $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ dadurch daß man ein gewisses Differenzial constant setzte, einen bestimmten Werth erhalten hat, z. B. §. 53. V. den Werth

$$T = -\frac{y - px}{y} - \frac{qx}{p} = -1 + \frac{px}{y} - \frac{qx}{p}$$

und nun in diesen Ausdruck statt p wiederum $\frac{dy}{dx}$, und statt q der Werth

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$$

substituirt wird, man einen unbestimmten Ausdruck, d. h. einen Ausdruck in höhern Differenzialen erhalten wird, in welchem jedes Differenzial, oder auch gar keines, constant angenommen zu werden braucht,

und der doch eben den Werth behält, welchen der ursprüngliche $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ für das Differenzial, welches man constant gesetzt hatte (§. 53. V.) erhielt.

Macht man die angeführte Substitution, so erhält man für den Ausdruck T die Formel

$$W = -1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} - \frac{dxddy - dyddx}{dydx^2} \cdot x$$

y mag also für eine Funktion von x seyn, welche man will, und man mag in dem Ausdrucke W für ein Differenzial unveränderlich annehmen, welches man will, um daraus wie in (§. 55.) den Werth von ddx ableiten, so wird doch immer die Formel W durch die Substitution $dy = pdx$, und $ddy = pddx + qdx^2$, sich wieder in $T = -1 + \frac{px}{y} - \frac{qx}{p}$ d. h. in den Werth verwandeln, den die ursprüngliche Formel $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ für das in (§. 53. V) constant gesetzte Differenzial erhielt, weil sich durch die angeführte Substitution in dem Ausdrucke W immer die Glieder aufheben werden, welche das ddx enthalten, wie (§. 54. II. §. 55. IV) und es also ganz gleichgültig ist, was man in W für ein

ein Differenzial constant setzen will, um daraus ddx zu bestimmen.

V. Wenn also gleich die Formel W oder

$$-1+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}-\frac{dxddy-dyddx}{dydx^2}\cdot x$$

eine ganz andere Gestalt hat, als die ursprüngliche

$$\frac{yddx-xddy}{dxdy}$$

so geben doch beyde für das constant gesetzte Differenzial ydx §. 53. V. einerley bestimmten Werth; ja die erstere Formel giebt so gar eben diesen Werth für jedes andere Differenzial, das man für sie als constant annehmen würde.

Die bisherigen Betrachtungen führen zu einer Aufgabe im nächsten §, von der man bey den Anwendungen der Differenzialrechnung, so wie auch in der Integralrechnung sehr häufigen Gebrauch macht.

§. 57.

Aufgabe.

Es ist ein Ausdruck in höhern Differenzialen vorgegeben, welcher für ein gewisses constant gesetztes erstes Differenzial, einen bestimmten Werth = T

erhält, d. h. sich in eine bestimmte Funktion = T verwandelt. Man soll jenen Ausdruck in einen andern W verwandeln, in welchem jedes Differenzial constant gesetzt werden kann, und welcher doch eben den bestimmten Werth T giebt.

Auflösung I. Man verwandele den vorgegebenen Ausdruck durch die Substitutionen

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx \text{ ꝛc.}$$

$$ddy = pddx + qdx^2 \quad (\text{§. 53. II.})$$

$$d^3y = pd^3x + 3qdxddx + rdx^3 \quad (\text{§. 49. VIII.})$$

u. s. w.

in einen andern, worin nur die unbestimmten Differenziale ddx, d^3x ꝛc. vorkommen, wie z. B. (§. 53. III).

II. Dann hebe man die Unbestimmtheit des erhaltenen Ausdrucks auf, durch Hülfe desjenigen ersten Differenzials, welches man constant setzt, und woraus sich die Werthe von ddx, d^3x ꝛc. ableiten lassen (wie z. B. §. 53. III. IV).

III. So erhält man einen Ausdruck T in endlichen Größen, der wie in den Beyspielen (§. 53. III. IV. V.) aus den Größen, y, x, p, q ꝛc. zusammengesetzt ist.

IV.

IV. In diesen Ausdruck T setze man nun wieder wie z. B. §. 56. statt p den Werth $\frac{dy}{dx}$, statt q den Werth $\frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx} = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, statt r den Werth $\frac{1}{dx} d \frac{dq}{dx}$, wofür man nach gehöriger Rechnung findet

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$$

so wird der neue Ausdruck W so beschaffen seyn, daß er [wie z. B. W (§. 56.)] mit dem ursprünglich vorgegebenen gleichen Werth T hat, was man auch in W für ein erstes Differenzial constant setzen mag.

Es ist unnöthig, diese allgemeine Vorschrift noch durch Beyspiele zu erläutern, da für jeden andern Ausdruck in höhern Differenzialen, eben so verfahren werden kann, als es mit dem vorgegebenen (§. 53. I.) gezeigt worden ist.

§. 58.

Lehrsatz.

Wenn Z eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y ist, folglich

$$dZ = Pdx + Qdy$$

ist, wo P, Q auch wieder Funktionen von x und y seyn werden, so wird

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Bew. I. Der Ausdruck $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ bedeutet nach (§. 17. III. IV.) daß man P so differenziiren soll, daß man nur y als veränderlich betrachtet, d. h. P blos nach y differenziiren, und dann dieses Differenzial mit dy dividiren soll.

Hingegen will $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ bedeuten, daß man Q blos nach x differenziiren, und das erhaltene Differenzial mit dx dividiren soll. Daß nun in beyden Fällen gleiche Quotienten zum Vorschein kommen, erhellet so.

II. Was auch Z für eine algebraische oder transcendentische Funktion von x, y seyn mag, so wird Z immer unter der allgemeinen Form (Einleitung §. IV.) nemlich

$$Z = Ax^{\alpha}y^{\beta} + Bx^{\gamma}y^{\delta} + Cx^{\varepsilon}y^{\zeta} + \text{u. s. w.}$$

enthalten seyn. Dies giebt

$$dZ = (A\alpha y^{\beta}x^{\alpha-1} + B\gamma y^{\delta}x^{\gamma-1} + C\varepsilon y^{\zeta}x^{\varepsilon-1} + \ldots)\,dx$$
$$+ (A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1} + B\delta x^{\gamma}y^{\delta-1} + C\zeta x^{\varepsilon}y^{\zeta-1} + \ldots)\,dy$$

III.

III. Demnach

$$P = A\alpha y^\beta x^{\alpha-1} + B\gamma y^\delta x^{\gamma-1} + C\varepsilon y^\zeta x^{\varepsilon-1} + \text{etc.}$$

$$Q = A\beta x^\alpha y^{\beta-1} + B\delta x^\gamma y^{\delta-1} + C\zeta x^\varepsilon y^{\zeta-1} + \text{etc.}$$

IV. Also

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = A\alpha\beta y^{\beta-1} x^{\alpha-1} + B\gamma\delta y^{\delta-1} x^{\gamma-1} + C\varepsilon\zeta y^{\zeta-1} x^{\varepsilon-1} + \ldots$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = A\alpha\beta y^{\beta-1} x^{\alpha-1} + B\gamma\delta y^{\delta-1} x^{\gamma-1} + C\varepsilon\zeta y^{\zeta-1} x^{\varepsilon-1} + \ldots$$

Also offenbar $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$.

Anmerkung.

Nach der Bezeichnungs-Art (§. 17. III. IV.) ist $P = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$, d. h. = dem Differenzialquotienten der Funktion Z nach x, und $Q = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$ = dem Differenzialquotienten der Funktion Z nach y

Es ist also klar, daß wenn man von jenem P oder $\left(\frac{dZ}{dx}\right)$ wieder den Differenzialquotienten nach y, und von Q oder $\left(\frac{dZ}{dy}\right)$ wieder den Differen-

zial-

zialquotienten nach x sucht, beyde Resultate einerley geben, welchen Satz man in Zeichen auch so ausdrücken kann

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{d\left(\frac{dZ}{dx}\right)}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)=\left(\frac{d\left(\frac{dZ}{dy}\right)}{dx}\right)$$

oder die Ausdrücke

$$\left(\frac{d\left(\frac{dZ}{dx}\right)}{dy}\right) \text{ und } \left(\frac{d\left(\frac{dZ}{dy}\right)}{dx}\right)$$

sind gleichlautend, d. h. es ist auch einerley, eine Funktion Z erst nach x, und dann das herauskommende Differenzial wieder nach y zu differenziiren, oder Z erst nach y, und das was herauskommt, wieder nach x zu differenziiren.

§. 59.

Zus. Ist Z eine transcendentische Funktion von xy, also z. B. durch Kreisbogen, Logarithmen, oder Kreisfunktionen gegeben, so ändert dies nach (Einl. VIII.) keinesweges die Allgemeinheit des gegebenen Beweises; wäre also z. B.

$$Z = \sin x \sin y$$

Also $dZ = \sin y \cos x . dx + \sin x \cos y . dy$

so ist $P = \sin y \cos x$; $Q = \sin x \cos y$

und

und folglich $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \cos x \cos y$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \cos y \cos x$$

Demnach wieder $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und so in andern Fällen.

§. 60.

Zus. Der bewiesene Lehrsatz ist sehr wichtig als Kennzeichen, um zu beurtheilen, ob ein vorgegebener Differenzialausdruck z. B.

$$dZ = Pdx + Qdy$$

das wirkliche Differenzial einer Funktion Z von zwey veränderlichen Größen x und y seyn könne. Findet man nemlich nicht die Bedingungsgleichung (équation de condition)

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

bestätigt, so kann $Pdx + Qdy$ nicht das Differenzial einer Funktion Z von beyden veränderlichen Größen x, y seyn.

Es sey z. B. die Differenzialgleichung

$$dZ = a^3 yx dx + x^2 y^3 dy$$

vorgegeben, also $P = a^3 yx$; $Q = x^2 y^3$, so hat man

man $\left(\frac{dP}{dy}\right) = a^3 x$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2y^3 x$$

also nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$.

Mithin kann $a^3 yxdx + x^2 y^3 dy$ nicht das Differenzial einer Funktion Z von den beyden veränderlichen Größen x und y seyn, oder es ist unmöglich, eine solche Funktion anzugeben, von der der Ausdruck $a^3 yxdx + x^2 y^3 dy$ das Differenzial seyn könnte.

§. 61.

Anmerkung. Der angeführte Lehrsatz ist in der Integralrechnung von sehr großem Nutzen. Euler hat ihn zuerst in den *Comment. acad. Petropol.* (T. VII. ad a. 1734 u. 1735, die jedoch erst 1740 erschienen sind) bey gewissen Untersuchungen über krumme Linien vorgetragen. Bossut behauptet, daß um das J. 1739 auch die Herren Fontaine und Clairaut auf eben diesen Satz gekommen seyn, ohne von Eulers Erfindung etwas gewußt zu haben (Traité de Calcul différentiel et integral. à Paris an VI. im Discours préliminaire p. 65) läßt jedoch Eulern die Gerechtig-

tigkeit wiederfahren, den Satz zuerst gelehrt zu haben.

§. 62.

Zus. Aus (§. 58. III.) wird nach einer leichten Rechnung

$$Px + Qy = A(\alpha + \beta)x^{\alpha}y^{\beta} + B(\gamma + \delta)x^{\gamma}y^{\delta} + C(\varepsilon + \zeta)x^{\varepsilon}y^{3}$$

Gesetzt nun, die Funktion Z sey gleichartig (Einleitung §. IV.), so hat man $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \zeta$ ꝛc. Nennt man demnach diese constante Summe beyder Exponenten von y und x in jedem Gliede der Funktion $= m$, so wird

$$Px + Qy = mZ$$

wo denn m die Dimension der gleichartigen Funktion Z darstellt.

Diese Eigenschaft gleichartiger Funktionen ist ebenfalls sehr merkwürdig, und bereits von Eulern in seiner *Mechanica s. motus scientia analytice exposita Petrop.* 1736. Tom. II. §. 497 vorgetragen und an a. O. mit Nutzen gebraucht worden.

§. 63.

Zus. Es sey Z eine Funktion von 3 veränderlichen Größen x, y, z, so hat man

$$dZ = Pdx + Qdy + Rdz$$

so oft man nun eine von den 3 Größen constant betrachten würde, würde sich die Differenzialgleichung um ein Glied vermindern, und z. B. in $dZ = Pdx + Qdy$ verwandeln, wenn z constant also $dz = 0$ wäre, oder in $dZ = Qdy + Rdz$, wenn x constant also $dx = 0$ wäre, oder in $dZ = Pdx + Rdz$, wenn y constant mithin $dy = 0$ wäre. Auf jede dieser drey besondern Gleichungen läßt sich der Satz §. 60. anwenden, daher erhält man, wenn $Pdx + Qdy + Rdz$, das wirkliche Differenzial einer Funktion von 3 veränderlichen Größen ist, allemahl

$$\text{I)} \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

$$\text{II)} \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

$$\text{III)} \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right).$$

Würden bey einem vorgegebenen Differenzial wie $Pdx + Qdy + Rdz$, nicht diese 3 Bedingungsgleichungen statt finden, so könnte das vorgegebene Differenzial kein wirkliches von 3 veränderlichen Größen seyn, oder es würde sich keine Funktion Z von x, y, z angeben lassen, deren Differenzial $dZ = Pdx + Qdy + Rdz$ seyn würde,

wie

wie man denn solches z. B. für zwey veränderliche Größen in §. 60. gesehen hat.

§. 64.

Zusatz. So findet man auch, wenn Z eine gleichartige Funktion von 3 veränderlichen Größen x, y, z, und von der Dimension m ist, auf eine ähnliche Weise wie §. 62.

$$Px + Qy + Rz = mZ$$

Wenn $dZ = Pdx + Qdy + Rdz$.

Beysp. Es sey $Z = x^3 y + z^2 yx$, so ist $m = 4$ und

$$dZ = (z^2 y + 3yx^2) dx + (x^3 + z^2 x) dy + 2xyz dz.$$

Demnach

$P = z^2 y + 3yx^2$ Also $Px = z^2 yx + 3yx^3$

$Q = x^3 + z^2 x$ also $Qy = z^2 yx + yx^3$

$R = 2xyz$ also $Rz = 2z^2 yx$

Mithin $Px + Qy + Rz = 4z^2 xy + 4yx^3$ welches offenbar $= 4Z$ ist.

§. 65.

Zus. Aehnliche Sätze wie (§. 63. 64.) lassen sich für Funktionen von so viel veränderlichen Größen als man will, leicht beweisen.

§. 66.

Lehrsatz.

Wenn Z eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x, y ist, so ist

$$\left(\frac{d^n\left(\frac{d^m Z}{d x^m}\right)}{d y^n}\right) = \left(\frac{d^m\left(\frac{d^n Z}{d y^n}\right)}{d x^m}\right)$$

Bew. Um erstlich die Bedeutung dieser Ausdrücke zu verstehen, so bemerke ich, daß

I. $\left(\frac{d^m Z}{d x^m}\right)$ den m^{ten} Differenzialquotienten der Funktion Z nach x (d. h. bey der Differenziation blos x als veränderlich gesetzt) bedeutet.

II. Hingegen $\left(\frac{d^n Z}{d y^n}\right)$ den n^{ten} Differenzialquotienten der Funktion Z nach y (d. h. blos y veränderlich gesetzt) vorstellt.

III. Man soll nun von jenem (I) wieder den n^{ten} Differenzialquotienten nach y, und von diesem (II) wieder den m^{ten} nach x nehmen. In beyden Fällen behauptet der Lehrsatz, werde gleich viel herauskommen.

IV. Um also dies zu beweisen, nehme ich aus dem allgemeinen Ausdrucke jeder Funktion (§. 58. II.)

II.) von zwey veränderlichen Größen, bloß ein Glied z. B. $A x^{\alpha} y^{\beta}$, welches als allgemeines Glied, jedes andere der Funktion bedeuten kann. Was von diesem gilt, wird begreiflich von mehreren dergleichen, die durch Addition oder Subtraktion mit einander verbunden sind, d. h. von der ganzen Funktion selbst gelten.

V. Ich setze also $Z = A x^{\alpha} y^{\beta}$, und der Kürze halber $A x^{\alpha} = X$; $y^{\beta} = Y$, demnach $Z = XY$ in welchem Ausdrucke also X kein y, und Y kein x enthält.

VI. Dies giebt folglich

$$\left(\frac{d^m Z}{d x^m}\right) = \frac{Y d^m X}{d x^m}$$ (weil Y kein x enthält).

Und $$\left(\frac{d^n Z}{d y^n}\right) = \frac{X d^n Y}{d y^n}$$ (weil X kein y enthält).

VII. Nun nehme man von $\left(\frac{d^m Z}{d x^m}\right)$ d. h. von $\frac{Y d^m X}{d x^m}$ den n^{ten} Differenzialquotienten nach y, so erhält man, weil X kein y enthält,

$$\left(\frac{d^n \left(\frac{d^m Z}{d x^m}\right)}{d y^n}\right) = \frac{d^m X}{d x^m} \cdot \frac{d^n Y}{d y^n}$$

VIII.

VIII. Und eben so weil Y kein x enthält, wird der m^{te} Differenzialquotient von $\left(\frac{d^n Z}{d y^n}\right)$ oder von $\frac{X d^n Y}{d y^n}$ nach x, d. h.

$$\left(\frac{d^m \left(\frac{d^n Z}{d y^n}\right)}{d x^m}\right) = \frac{d^m X}{d x^m} \cdot \frac{d^n Y}{d y^n}$$

IX. Beyde Ausdrücke (VII. VIII.) sind also offenbar einander gleich, mithin erhellet hieraus die Richtigkeit des zu erweisenden Lehrsatzes.

Sehr oft läßt man auch die beyden äußersten Parenthesen in den Ausdrücken des Lehrsatzes weg und schreibt blos z. E.

$$\frac{d^m \left(\frac{d^n Z}{d y^n}\right)}{d x^m}$$

Beyspiel.

X. Es sey $Z = x^8 y^3 + x^6 y^5 + x y^7$, und $m = 3$, $n = 2$, so hat man erstlich für den 3ten Differenzialquotienten von Z nach x, der Ordnung nach

(dZ)

$$\left(\frac{dZ}{dx}\right) = 8 \,.\, x^7 y^3 + 6x^5 y^5 + y^7$$

$$\left(\frac{d^2 Z}{dx^2}\right) = 8 \,.\, 7 \,.\, x^6 y^3 + 6 \,.\, 5 \,.\, x^4 y^5$$

$$\left(\frac{d^3 Z}{dx^3}\right) = 8 \,.\, 7 \,.\, 6 x^5 y^3 + 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, x^3 y^5 \;(☽)$$

Und für den 2ten Differenzialquotienten von Z nach y der Ordnung nach

$$\left(\frac{dZ}{dy}\right) = 3x^8 y^2 + 5x^6 y^4 + 7xy^6$$

$$\left(\frac{d^2 Z}{dy^2}\right) = 3 \,.\, 2 \,.\, x^8 y + 5 \,.\, 4x^6 y^3 + 7 \,.\, 6 \,.\, xy^5 \;(\odot)$$

Nimmt man nun weiter den 2ten Differenzialquotienten von ☽ nach y, und den 3ten von $\odot$ nach x, so ergiebt sich

$$\left(\frac{d☽}{dy}\right) = 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 3x^5 y^2 + 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 5\, x^3 y^4$$

$$\left(\frac{d^2☽}{dy^2}\right) = 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, x^5 y + 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 4 x^3 y^3$$

Sodann

$$\left(\frac{d\odot}{dx}\right) = 3 \,.\, 2 \,.\, 8x^7 y + 5 \,.\, 4 \,.\, 6x^5 y^3 + 7 \,.\, 6 \,.\, y^5$$

$$\left(\frac{d^2\odot}{dx^2}\right) = 3 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, 7x^6 y + 5 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 5x^4 y^3$$

$$\left(\frac{d^3\odot}{dx^3}\right) = 3 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6x^5 y + 5 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4x^3 y^3$$

Es

Es erhellet also, daß

$$\left(\frac{d^2 \text{☽}}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^3 \odot}{d x^3}\right)$$

d. h.

$$\left(\frac{d^2 \left(\frac{d^3 Z}{d x^3}\right)}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^3 \left(\frac{d^2 Z}{d y^2}\right)}{d x^3}\right)$$

§. 67.

Zus. Es ist also einerley, ob man von einer Funktion Z zweyer veränderlichen Größen x, y zuerst das m^{te} Differenzial nach x, und von diesem wieder das n^{te} nach y nimmt, oder letzteres zuerst thut und dann Ersteres. Es verhält sich hier wie mit mehr andern analogen Sätzen, sowohl in der Analysis, als auch selbst in der gemeinen Arithmetik z. B. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ oder $\sqrt[m]{(a)^n} = (\sqrt[m]{a})^n$ u. d. gl.

Uebrigens ist klar, daß der Lehrsatz (§. 58. Anmerk.) nur ein specieller Fall des weit allgemeinern (§. 66.) ist, und aus letzterm sich ergiebt, wenn man $m = n = 1$ setzt.

§. 68.

Vorbereitung zu folgendem Lehrsatze.

I. Wenn ein Ausdruck Z zwischen zwey veränderlichen Größen x, y vorgegeben ist, in welchem zugleich die Differenzialquotienten

dy

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{ddp}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r$$

u. s. w. vorkommen (das Differenzial dx unveränderlich angenommen) so kann man Z als eine Funktion von x, y, p, q, r u. s. w. ansehen, deren Differenzial dZ sich durch $\mu dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq$ u. s. w. wird ausdrücken lassen, worin $\mu, \nu, \pi, \varkappa$ rc. auch wieder Funktionen von x, y, p, q rc. seyn können, welche sich denn leicht durch die Differenziation von Z finden lassen.

II. Der Differenzialquotient $\frac{dZ}{dx}$, welchen ich mit V bezeichnen will, wird dann die Form

$$\frac{dZ}{dx} = \mu + \nu \frac{dy}{dx} + \pi \frac{dp}{dx} + \varkappa \frac{dq}{dx} \ldots$$

oder

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r \ldots$$

haben (I).

III. Nun suche man das nächstfolgende Differenzial ddZ, so ist, weil dx constant gesetzt worden

$$ddZ = d\mu dx + d\nu dy + \nu ddy + d\pi dp + \pi ddp + d\varkappa dq + \varkappa ddq \text{ u. s. w.}$$

und folglich auf beyden Seiten mit dx^2 dividirt, der Differenzialquotient

$$\frac{ddZ}{dx^2} = \frac{d\mu}{dx} + \frac{d\nu}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\nu ddy}{dx^2} + \frac{d\pi}{dx} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{\pi ddp}{dx^2} + \frac{d\varkappa}{dx} \cdot \frac{dq}{dx} + \frac{\varkappa ddq}{dx^2} + \frac{d\varrho}{dx} \cdot \frac{dr}{dx} \text{ u. s. w.}$$

welches wegen

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{ddp}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r \text{ u. s. w. (I)}$$

sich in

$$\frac{ddZ}{dx^2} = \frac{d\mu}{dx} + \frac{d\nu}{dx} p + \left(\nu + \frac{d\pi}{dx}\right) q + \left(\pi + \frac{d\varkappa}{dx}\right) r \ldots$$

verwandelt.

IV. Da nun $\frac{d\mu}{dx}$; $\frac{d\nu}{dx}$; $\nu + \frac{d\pi}{dx}$; u. s. w.

auch wieder Funktionen von x, y, p, q ꝛc. seyn können, so will ich, wie sie auch beschaffen seyn mögen, der Kürze halber

$d\mu$

$$\frac{d\mu}{dx} = M$$

$$\frac{d\nu}{dx} = N$$

$$\nu + \frac{d\pi}{dx} = P$$

$$\pi + \frac{d\varkappa}{dx} = Q$$

$$\varkappa + \frac{d\varrho}{dx} = R$$

u. s. w. nennen, so hat man

$$\frac{ddZ}{dx^2} = M + Np + Pq + Qr + Rs \text{ 2c.}$$

eine Form, welche derjenigen für das nächst niedrigere Differenzial

$$\frac{dZ}{dx} = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r \text{ 2c.}$$

in (I. II.) völlig ähnlich ist.

V. Indessen erhellet, daß wenn z. B. die Funktion Z bis auf den Differenzialquotienten $\frac{ddy}{dx^2}$ $= q$ gienge, der Differenzialquotient $\frac{dZ}{dx}$ nur bis auf $\frac{dq}{dx}$ oder $\frac{d^3y}{dx^3}$, d. h. bis auf r gehen kann, und daß in dem Ausdrucke

$$\frac{dZ}{dx} = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r$$

die Funktionen μ, ν, π, $\varkappa$, zwar p und q aber nicht r enthalten können.

VI. Der Differenzialquotient $\frac{ddZ}{dx^2}$, den ich mit W bezeichnen will, kann alsdann auch nur bis $\frac{d^4y}{dx^4}$ d. h. bis s gehen; und in dem Ausdrucke

$$\frac{ddZ}{dx^2} = M + Np + Pq + Qr + Rs$$

können M, N, P, Q, R, zwar die Größen p, q, aber weder r noch s enthalten.

Diese Schlüsse lassen sich leicht auch auf die Fälle erweitern, wenn z. B. die anfängliche Funktion Z bis auf $\frac{d^3y}{dx^2}$, oder $\frac{d^4y}{dx^3}$ u. s. w. gienge.

§. 69.

Lehrsatz.

Wenn

$$W = M + Np + Pq + Qr + Rs$$

der nächst höhere Differenzialquotient von

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r$$

ist

ist, so daß M, N, P, Q, R die Werthe §. 68. V. VI. haben, so ist

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0.$$

Bew. I. Wenn V nur bis r geht, so sind die auf $\varkappa$ folgenden Coefficienten ϱ, σ, τ ꝛc. alle $= 0$.

II. Dies giebt in §. 68. IV. wegen $d\varrho = 0$ für R bloß den Werth $\varkappa$, und folglich $\frac{d^3R}{dx^3} = \frac{d^3\varkappa}{dx^3}$

III. Der Werth von

$$\frac{ddQ}{dx^2} \text{ ist} = \frac{dd\pi}{dx^2} + \frac{d^3\varkappa}{dx^3} \text{ (§. 68. IV.)}$$

$$\frac{dP}{dx} \;..\; = \frac{d\nu}{dx} + \frac{dd\pi}{dx^2}$$

$$N \;..\; = \frac{d\nu}{dx}.$$

IV. Demnach

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0.$$

V. Ich habe bloß zum Beyspiel angenommen, daß der Differenzialquotient V nur bis r, also W nur

nur bis s gehet. Man wird auf eine ähnliche Art finden, daß wenn V nur bis s, und folglich W bis auf t gienge, also

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r + \varrho s.$$

Mithin

$$W = M + Np + Pq + Qr + Rs + St$$

wäre

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} = 0$$

seyn würde u. s. w.

§. 70.

Anmerk. Dieser Lehrsatz ist, wie wir in der Integralrechnung sehen werden, von sehr großer Wichtigkeit. Denn man kann durch denselben allemahl beurtheilen, ob ein Differenzialquotient, der durch höhere Differenziale gegeben ist, wie z. B.

$$W = M + Np + Pq + Qr + Rs \ldots$$

oder auch ein Differenzial wie

$$Wdx = Mdx + Npdx + Pqdx + Qrdx + Rsdx \ldots$$

oder auch wie

$$Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rds \ldots$$

ein wirkliches Differenzial einer Funktion zwischen x, y, p, q u. s. w. seyn kann. Ist nemlich das Verhalten der Funktionen M, N, P, Q rc. nicht von der Beschaffenheit, daß der Bedingungsgleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots = 0$$

ein Genüge geschieht, so kann der Ausdruck

$$Mdx + Ndy + Pdp + Qdq \ldots$$

weder ein wirkliches Differenzial einer Funktion von x, y, p, q... noch auch der Differenzialquotient

$$M + Np + Pq + Qr \ldots$$

aus einer solchen Funktion entstanden seyn.

Findet dagegen die angeführte Bedingungsgleichung statt, so lassen sich aus den gegebenen Funktionen M, N, P, Q... durch Hülfe der Gleichungen §. 68. IV. und durch Zuziehung noch einiger anderer Betrachtungen in vorgegebenen Fällen, rückwärts auch wieder die Funktionen μ, ν, π, $\varkappa$ ꝛc. bestimmen (welches aber jetzt noch nicht hieher gehört), woraus sich denn die Funktion $V = \mu + \nu p + \pi q$ u. s. w. ergiebt, aus deren Differenziation die vorgegebene $W = M + Np + Pq$ ꝛc. oder auch das Differenzial $Mdx + Ndy + Pdp$ ꝛc. entstehen würde.

Den Lehrsatz §. 69. hat Euler in seiner Integralrechnung aus der Lehre von den Variationen oder dem Variationscalcul abgeleitet. (M. s. dessen *Instit. Calc. Integr. Petrop.* 1770. Vol. III. in *Append. de calc. Var.* §. 92.) Daß das Euler-

sche Theorem kein anderes als das bisher betrachtete ist, wird in der Folge noch besonders erhellen. Euler hielt den Beweis desselben ohne Beyhülfe der Variationsrechnung für schwer (das. §. 96). Indessen haben Cousin, la Croix u. a. Beweise aus andern Principien gegeben, die aber Anfängern nicht so ganz klar seyn mögten. Das von mir gewählte Verfahren ist sehr einfach, und beruht bloß auf gewöhnlichen Sätzen der Differenzialrechnung.

Cousin *Calcul. diff. et integral.* Tom. I. §. 240.
La Croix *Traité du Calc. diff. et integral.* T. I. §. 84 etc.

§. 71.

Lehrsatz.

Wenn y eine Funktion von x bedeutet und y sich in Y verwandelt, wenn x um die endliche Größe c zunimmt, so ist

$$Y = y + c\frac{dy}{dx} + \frac{c^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{c^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

wo $\frac{dy}{dy}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. die Differenzialquotienten der Funktion y bedeuten, dx bey der Differenziation als constant angenommen.

Bew.

Bew. I. Was auch y für eine Funktion von x seyn mag, so läßt sie sich allgemein durch eine Reihe, wie

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma$$

darstellen. (Einl. VII.)

II. Dies giebt erstlich

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = A\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} + B\beta(\beta-1)(\beta-2)x^{\beta-3} + \text{ u. s. w.}$$

wovon das Gesetz einleuchtend ist, ohne daß es nöthig ist, das allgemeine Glied davon hinzuschreiben.

III. Setzt man nun in (I) $x + c$ statt x, so ist

$$Y = A(x+c)^\alpha + B(x+c)^\beta + C(x+c)^\gamma \text{ ꝛc.}$$

oder nach dem Binomischen Lehrsatz

$$Y = Ax^\alpha + A\alpha x^{\alpha-1}c + \frac{A\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^{\alpha-2}c^2 + \text{ꝛc.}$$

$$+ Bx^\beta + B\beta x^{\beta-1}c + \frac{B\beta(\beta-1)}{1.2}x^{\beta-2}c^2 + \text{ꝛc.}$$

$$+ Cx^\gamma + C\gamma x^{\gamma-1}c + \frac{C\gamma(\gamma-1)}{1.2}x^{\gamma-2}c^2 + \text{ꝛc.}$$

IV. Hier sieht man nun sogleich, daß erstlich die Summe aller Glieder in der ersten Vertikalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens die gegebene Funktion y selbst ist. (I.)

V. Die Summe aller Glieder in der zweyten Verticalreihe ist

$$(A\alpha x^{\alpha-1}+B\beta x^{\beta-1}+C\gamma x^{\gamma-1}\ldots)c=c\frac{dy}{dx}(II).$$

VI. Die Summe aller Glieder in der dritten ist

$$\frac{c^2}{1.2}(A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+B\beta(\beta-1)x^{\beta-2}$$
$$+C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}\ldots)=\frac{c^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}(II).$$

VII. Setzt man diese Betrachtungen weiter fort, so ergiebt sich für die Summe aller Glieder in der vierten Verticalreihe der Ausdruck $\frac{c^3}{1.2.3}\ \frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w.

Demnach überhaupt

$$Y=y+c\frac{dy}{dx}+\frac{c^2}{1.2}\ \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{c^3}{1.2.3}\ \frac{d^3y}{dx^3}\text{ u. s. w.}$$

wo:

wovon das allgemeine Glied $\frac{c^n}{1.2...n} \frac{d^n y}{dx^n}$ seyn würde.

Anmerkung I.

Diesen Lehrsatz hat Taylor erfunden, und man nennt ihn deswegen gewöhnlich auch den Taylorischen Lehrsatz.

TAYLORI *Methodus incrementorum. Londini* 1715.

Man kann den Satz auf viel andere Arten beweisen. Die meisten Beweise die ich kenne, setzen voraus, daß eine jede Funktion von x durch eine Reihe von Potenzen der Größe x ausgedrückt werden könne, und da hieran wohl Niemand zweifeln wird (Einl. §. VII.), so habe ich den Beweis des Lehrsatzes nach diesem Princip gegeben. Sonst kann man ihn auch aus der Lehre von den endlichen Differenzen, wie es z. B. von Eulern (Inst. Calc. diff. P. II. Cap. III.) in der Hauptsache geschehen ist, ableiten. M. s. auch Herrn Prof. Busse Neue Methode des Größten und Kleinsten. Freyb. 1808. S. 31.) Aber ich finde gegen diesen Beweis auf die Art, wie er gewöhnlich z. B. von Eulern geführt wird, verschie-

denes

denes zu erinnern, und darum habe ich mich desselben nicht bedienen wollen.

Anmerkung II.

Aufgabe.

Es sey z eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y. Man sucht den Werth dieser Funktion, wenn x sich in x + c und y sich in y + k verwandelt. (Der Taylorische Lehrsatz für eine Funktion von zwey veränderlichen Größen.)

Aufg. I. Es verwandele sich erstlich z in z', wenn man blos x um c sich ändern läßt, y aber einstweilen als eine constante Größe in der Funktion z betrachtet, so ist nach Taylors Lehrsatz

$$z' = z + c\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \text{u. s. w.}$$

wo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$; $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ ꝛc. die Differenzialquotienten der Funktion V bedeuten, bey der Differenziation blos x als veränderlich angenommen.

II. Ich will der Kürze halber diese partiellen Differenzialquotienten, der Ordnung nach mit p, q, r ꝛc. bezeichnen, also

$$z' = z + cp + \frac{c^2}{1.2} q + \frac{c^3}{1.2.3} r + \text{ꝛc.}$$

setzen.

III. Nun suche man weiter, in welchen Werth sich z' verwandelt, wenn man x als unveränderlich behandelt, und blos y sich in y + k verwandeln läßt. Man setze, aus z' werde dann z'', so ist abermahls nach dem Taylorischen Lehrsatze

$$z'' = z' + k\left(\frac{dz'}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2 z'}{dy^2}\right) + \text{u. s. w.}$$

Und z'' wird nun den Werth der Funktion z ausdrücken, wenn nicht allein x sich in x + c (I), sondern auch y sich in y + k verwandelt hat.

IV. Es kommt also nun noch blos darauf an, die Werthe der Differenzialquotienten $\left(\frac{dz'}{dy}\right)$; $\left(\frac{d^2 z'}{dy^2}\right)$ ꝛc. zu bestimmen und in die Reihe (III) zu substituiren.

Da nun aber z' selbst schon durch die Reihe (II) gefunden ist, so hat man weiter nichts nöthig, als die

die Glieder dieser Reihe selbst wieder und zwar nach y zu differenziiren. Dies giebt denn wegen

$$z' = z + cp + \frac{c^2}{1.2} q + \frac{c^3}{1.2.3} r$$

$$\left(\frac{dz'}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) + c\left(\frac{dp}{dy}\right) + \frac{c^2}{1.2}\left(\frac{dq}{dy}\right) + \text{rc.}$$

$$\left(\frac{d^2 z'}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + c\left(\frac{d^2 p}{dy^2}\right) + \frac{c^2}{1.2}\left(\frac{d^2 q}{dy^2}\right) \text{rc.}$$

u. s. w.

V. Hierauf wird denn nach gehöriger Substitution in (III)

$$\begin{aligned} z'' = z + cp + \frac{c^2}{1.2} q + \frac{c^3}{6} r \ldots \\ + k\left(\frac{dz}{dy}\right) + kc\left(\frac{dp}{dy}\right) + \frac{kc^2}{2}\left(\frac{dq}{dy}\right) \ldots \\ + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + \frac{k^2 c}{2}\left(\frac{d^2 p}{dy^2}\right) \ldots \\ + \frac{k^3}{6}\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) \ldots \end{aligned}$$

VI. Ich habe in dieser Reihe alle diejenigen Differenzialquotienten, welche zu einerley Ordnung oder Dimension gehören, unter einander gesetzt. So gehören z. B. die Glieder $c.p$ und $k\left(\frac{dz}{dy}\right)$ als erste

Diffe-

Differenzialquotienten zusammen, indem $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ das erste Differenzial der Funktion z nach x, so wie $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ das erste Differenzial der Funktion z nach y bedeutet. Ferner gehören als zweyte Differenzialquotienten zusammen, die Glieder

$$\frac{c^2}{2} q; \; kc \left(\frac{dp}{dy}\right); \; \frac{k^2}{1.2} \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

Denn es ist $q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ ein zweyter Differenzialquotient, so wie $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)$, und mit diesem ist homogen der Quotient $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, weil p schon für sich ein erster Differenzialquotient $= \frac{dz}{dx}$ ist, und also eigentlich

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}\right)$$

ebenfalls durch eine doppelte Differenziation erhalten wird.

So wird man auf eine ähnliche Art sich bald überzeugen, daß die Differenzialquotienten, welche in dem vierten Gliede von z″ unter einander stehen, nem-

nemlich r, $\left(\frac{dq}{dy}\right)$; $\left(\frac{d^2 p}{dy^2}\right)$ $\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$ sämmtlich von der dritten Ordnung sind, und also in so fern zusammengehören.

VI. Zugleich wird nach der von mir gewählten Bezeichnungsart, auch sehr leicht das Gesetz des Fortgangs in (V) erhellen.

Man nenne die Summe der zusammengehörigen Glieder, nemlich

$$\frac{c^2}{2} q + ck\left(\frac{dp}{dy}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = A$$

$$\frac{c^3}{6} r + \frac{kc^2}{2}\left(\frac{dq}{dy}\right) + \frac{k^2 c}{2}\left(\frac{d^2 p}{dy^2}\right) + \frac{k^3}{6}\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = B$$

so ist auch

$$A = \frac{1}{1.2}\left(c^2 q + 2kc\left(\frac{dp}{dy}\right) + k^2\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\right)$$

$$B = \frac{1}{1.2.3}\left(c^3 r + 3kc^2\left(\frac{dq}{dy}\right) + 3k^2 c\left(\frac{d^2 p}{dy^2}\right) + k^3\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)\right)$$

Hier bemerkt man z. B. in A, daß die Coefficienten der in A vorkommenden Differentialquotienten, der Ordnung nach die einzelnen Glieder von

$(c+k)^2 = c^2 + 2kc + k^2$ sind, daß die Coeficienten in B die einzelnen Glieder von $(c+k)^3 = c^3 + 3kc^2 + 3k^2c + k^3$ sind u. s. w. Nimmt man nun zugleich Rücksicht darauf, wie in A und B nach der Ordnung der Buchstaben r, q, p, .. z, die Differenzialquotienten gebildet sind, so wird man nach dem beobachteten Gesetz bald bemerken, daß z. B. das auf B folgende Glied C würde heißen müssen $\frac{1}{1.2.3.4}\left(c^4 s + 4kc^3\left(\frac{dr}{dy}\right) + 6k^2c^2\left(\frac{d^2q}{dy^2}\right)\right.$ $\left. + 4k^3c\left(\frac{d^3p}{dy^3}\right) + k^4 \frac{d^4z}{dy^4}\right)$.

Und so allgemein

$$N = \frac{1}{1.2.3..n}\left(c^n \mathfrak{N} + nkc^{n-1}\left(\frac{d\mathfrak{N}'}{dy}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{n(n-1)}{1.2} k^2 c^{n-2}\left(\frac{d\mathfrak{N}''}{dy^2}\right) + \ldots k^n\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)\right),$$

wenn der Kürze halber $\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) = \mathfrak{N}$; $\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = \mathfrak{N}'$ u. s. w. gesetzt wird. Eine Anwendung dieses Satzes wird unten in der Lehre vom Grösten und Kleinsten vorkommen.

§. 72.

Bezeichnet man eine Funktion von x nach La Grange u. a. neuern Analysten durch φ (x) oder

auch schlechtweg durch φx, und den Werth von φx, wenn sich x in $x+c$ verwandelt durch $\varphi(x+c)$, so hat man für Y (§. 71.) auch die Bezeichnung

$$\varphi(x+c)=\varphi x+c\frac{d\varphi x}{dx}+\frac{c^2}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2}+\frac{c^3}{1.2.3}\frac{d^3\varphi x}{dx^3} \text{ ꝛc.}$$

Die Differenzialquotienten $\frac{d\varphi x}{dx}$; $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$; u. s. w. nennt La Grange fonction prime, seconde ꝛc. von φx, und bezeichnet sie mit $\varphi' x$, $\varphi'' x$, u. s. w. wodurch denn die Reihe für $\varphi(x+c)$ auch so aussieht

$$\varphi(x+c)=\varphi x+c\varphi' x+\frac{c^2}{1.2}\varphi'' x+\frac{c^3}{1.2.3}\varphi''' x \text{ ꝛc.}$$

Statt des griechischen φ, werden auch häufig die lateinischen Buchstaben F, oder f gebraucht, das Wort Funktion anzudeuten.

Arbogast nennt die Funktionen $\varphi' x$, $\varphi'' x$ auch fonctions derivées. (Man vergleiche hiemit §. 49.)

Ich finde keinen hinlänglichen Grund, diese Benennungen statt des Worts Differenzialquotienten zu gebrauchen, noch auch die ältere Bezeichnungsart $\frac{d\varphi x}{dx}$; $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$ u. s. w. für den ersten, zweyten ꝛc. Differenzialquotienten, mit den Zeichen $\varphi' x$, $\varphi'' x$ ꝛc. zu vertauschen.

Euler

Euler bedient sich meist der Buchstaben p, q, r ꝛc., um der Ordnung nach die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ꝛc. oder $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$; $\frac{d^3\varphi x}{dx^3}$ ꝛc. damit zu bezeichnen, und diese Bezeichnungen haben sich, so bald von Differenzialquotienten die Rede ist, gewisser maaßen ein Eigenthumsrecht erworben, wie z. B. der Buchstabe π für die bekannte Ludolphische Zahl. Kommen in einer Rechnung Potenzen von Differenzialquotienten vor, so ist es ohnstreitig bequemer, sich der Buchstaben p, q, r ꝛc. als der Bezeichnungen $\varphi' x$, $\varphi'' x$ u. s. w. zu bedienen. Aber so glaubt man oft durch neue Zeichen einer Untersuchung ein neues Ansehen zu geben, und wenn man die neuen Zeichen wegschafft, so findet man oft eine gewöhnliche und schon längst bekannte Sache.

§. 73.

Den Taylorischen Lehrsatz durch einige Beyspiele zu erläutern, so sey

I. Beysp. y oder $\varphi x = x^3 + 4x^2 + 7$. Man verlangt den Werth von y, wenn x sich in $x + 5$ verwandelt. Man hat also erstlich

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 8.$$

$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$; da dieser Differenzialquotient bereits eine constante Zahl ist, so sind alle folgenden wie $\frac{d^4y}{dx^4}$; $\frac{d^5y}{dx^5}$ ꝛc. $= 0$.

Da nun $c = 5$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} y &= x^3 + 4x^2 + 7 \\ c\,\frac{dy}{dx} &= 15x^2 + 40x \\ \frac{c^2}{1.2}\,\frac{d^2y}{dx^2} &= 75x + 100 \\ \frac{c^3}{1.2.3}\,\frac{d^3y}{dx^2} &= 125 \end{aligned}$$

Mithin $Y = x^3 + 19x^2 + 115x + 232.$

Dies ist also der Werth von $x^3 + 4x^2 + 7$ wenn x sich in $x + 5$ verwandelt, wie auch erhellen wird, wenn man den Ausdruck $(x + 5)^3 + 4(x + 5)^2 + 7$ unmittelbar berechnen wollte.

Man sieht leicht, daß so oft y durch eine Potenzenreihe von x, deren Exponenten lauter ganze Zahlen

len sind, gegeben ist, die Taylorische Reihe allemahl abbrechen wird, wie auch nach der Natur der Sache nicht anders seyn kann.

II. Beysp. $y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$; man verlangt den Werth von $\sqrt[m]{x}$, wenn sich x in $x + c$ verwandelt. Jetzt erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{\sqrt[m]{x}}{mx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right) x^{\frac{1}{m}-2} = -\frac{m-1}{m^2x^2}\sqrt[m]{x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right) x^{\frac{1}{m}-3} = +\frac{(m-1)(2m-1)}{m^3\ x^3}\sqrt[m]{x}$$

So findet man weiter

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{m^4\ x^4}\sqrt[m]{x}$$

u. s. w. demnach Y oder

$$\sqrt[m]{(x+c)} = \left(1 + \frac{c}{mx} - \frac{(m-1)c^2}{1.2m^2x^2} + \frac{(m-1)(2m-1)c^3}{1.2.3m^3x^3} \text{ etc.}\right)\sqrt[m]{x}.$$

In diesem Beyspiele bricht also die Reihe nicht ab, sondern läuft ins unendliche fort. Indessen giebt sie Veranlassung, Wurzelgrößen durch eine brauchbare Näherung auszudrücken, wozu nicht allein die so eben gefundene Reihe, sondern auch folgende dienen kann.

Man setze m und c negativ, so wird

$$\frac{1}{\sqrt[m]{(x-c)}} = \left(1 + \frac{c}{mx} + \frac{(m+1)c^2}{1.2m^2x^2} + \frac{(m+1)(2m+1)c^3}{1.2.3m^3x^3} \text{ ꝛc.}\right)\frac{1}{\sqrt[m]{x}}$$

Wird nun der Kürze halber

$$\frac{1}{m} = \alpha; \quad \frac{m+1}{1.2m^2} = \beta; \quad \frac{(m+1)(2m+1)}{1.2.3m^3} = \gamma$$

$$\frac{(m+1)(2m+1)(3m+1)}{1.2.3.4.m^4} = \delta \text{ u. s. w.}$$

gesetzt, so ist

$$\sqrt[m]{x} = \left(1 + \frac{\alpha c}{x} + \frac{\beta c^2}{x^2} + \frac{\gamma c^3}{x^3} \text{ ꝛc.}\right)\sqrt[m]{(x-c)}$$

Mithin x + c statt x gesetzt

$$\sqrt[m]{(x+c)} = \left(1 + \frac{\alpha c}{x+c} + \frac{\beta c^2}{(x+c)^2} + \frac{\gamma c^3}{(x+c)^3} \text{ ꝛc.}\right)\sqrt[m]{x}$$

Man sieht leicht, daß diese Reihe in jedem Falle sich nähern wird, und zwar desto schneller, je kleiner c in Vergleichung von x + c ist.

Verlangte man z. B. die Cubikwurzel von 34; so zerlege man 34 in ein paar Theile = 27 + 7 = x + c aus deren einem x die Cubikwurzel rational

val ist, wie hier aus 27. Setzt man also in die so eben gefundene Formel $m = 3$; $x = 27$; $c = 7$; so ist erstlich

$$\alpha = \frac{1}{3};\ \beta = \frac{2}{9};\ \gamma = \frac{14}{81};\ \delta = \frac{35}{243}$$

und folglich

$$\sqrt[3]{34} = \left(1 + \frac{7}{3.34} + \frac{2.49}{9.34^2} + \frac{14.343}{81.34^3} \text{ic.}\right)3$$

§. 74.

Vorzüglich brauchbar zeigt sich das Taylorische Theorem in der Entwickelung von allerley Reihen für logarithmische, trigonometrische, und andere Funktionen, wie folgende Beyspiele ausweisen.

Erstes Beysp. Man setze $y = \log x$; so ist $dy = M\frac{dx}{x}$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{x}$, wenn M die Bedeutung (§. 21.) hat. Demnach $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1.2M}{x^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1.2.3.M}{x^4}$; $\frac{d^5y}{dx^5} = +\frac{1.2.3.4.M}{x^5}$ u. s. w. Demnach ist der Werth von y oder log x, wenn sich x in $x + c$ verwandelt, d. h. Y oder

$$l(x+c) = lx + \frac{Mc}{x} - \frac{Mc^2}{2x^2} + \frac{Mc^3}{3x^3} - \frac{Mc^4}{4x^4} \text{ ꝛc.}$$

$$= \log x + M\left(\frac{c}{x} - \frac{c^2}{2x^2} + \frac{c^3}{3x^3} - \frac{c^4}{4x^4} \text{ ꝛc.}\right)$$

Ist also log x gegeben, so kann man durch Hülfe dieser Reihe, auch den log $(x+c)$ finden.

2. Auch wird wegen $\log(x+c) - \log x$ $= \log \frac{x+c}{x}$

$$\log \frac{x+c}{x} = M\left(\frac{c}{x} - \frac{c^2}{2x^2} + \frac{c^3}{3x^3} - \frac{c^4}{4x^4} \ldots\right)$$

Oder wenn man $\frac{c}{x} = u$ setzt

$$\log(1+u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \ldots\right)$$

Und wenn u negativ ist

$$\log(1-u) = -M\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \ldots\right)$$

Mithin $\log(1+u) - \log(1-u)$ oder

$$\log \frac{1+u}{1-u} = 2M\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \text{ u. s. w.}\right)$$

Für die natürlichen Logarithmen ist $M = 1$.

3.

3. Setzt man also zur Abkürzung $\frac{1+u}{1-u} = N$, wodurch $u = \frac{N-1}{N+1}$ wird, so hat man für die Berechnung des Logarithmen einer jeden Zahl N, in einem System, dem der Modulus M (§. 24.) zugehört, die in jedem Falle sich nähernde Reihe

$$\log N = 2M\left(\frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^5 \text{ 2c.}\right)$$

4. Will man umgekehrt den Modulus M finden, so nenne man die in M multiplicirte Reihe $= \mathfrak{N}$, so hat man $\frac{\log N}{2\mathfrak{N}} = M$.

Z. B. für das Briggische System ist, wenn $N = 10$ ist, $\log N = 1$; und $\frac{N-1}{N+1} = \frac{9}{11}$; daher

$$\frac{1}{2\left(\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5\right.} = M$$

5. Da aber die Reihe im Divisor sich langsam nähert, so hat man andere Mittel angewandt, sowohl M als auch die Logarithmen von Zahlen überhaupt zu berechnen. Folgendes Verfahren würde für die Berechnung der Tafeln vorzüglich brauchbar gewesen seyn.

Man setze in (2) $\frac{1+u}{1-u}=\frac{m^2}{m^2-1}$; so findet sich $u=\frac{1}{2m^2-1}$; und nun wegen $\log\frac{1+u}{1-u}$ $=2\log m-\log(m^2-1)=2\log m-\log(m+1)(m-1)=2\log m-\log(m-1)-\log(m+1)$

$$2\log m=\log(m-1)+\log(m+1)+2M\left(\frac{1}{2m^2-1}+\frac{1}{3(2m^2-1)^3}+\frac{1}{5(2m^2-1)^5}\text{ etc.}\right)$$

Mithin

$$\log m=\frac{1}{2}\left(\log(m-1)+\log(m+1)\right)+M\left(\frac{1}{2m^2-1}+\frac{1}{3(2m^2-1)^3}+\frac{1}{5(2m^2-1)^5}\text{ etc.}\right)$$

Durch Hülfe dieser Formel kann man also leicht den Logarithmen jeder ganzen Zahl m aus den Logarithmen der vorhergehenden und nächstfolgenden Zahl finden. Ist nun m eine Primzahl, worauf es bey der Berechnung der Logarithmen-Tafeln hauptsächlich ankam, weil die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch die bloße Addition der Logarithmen der Primzahlen entstehen, so ist sowohl m — 1 als m + 1 allemal eine durch 2 theilbare Zahl, mithin aus Primzahlen zusammen gesetzt,

setzt, die kleiner als die gesuchte m sind, und wenn man daher die Logarithmen der Primzahlen nach der Ordnung, wie sie auf einander folgen, sucht, so sind die Logarithmen derjenigen, woraus $m - 1$ und $m + 1$ bestehen, als bereits gefunden anzusehen.

6. Ich will $M = 1$ setzen, so erhält man die natürlichen Logarithmen.

Also zuerst wenn $m = 2$, so ist wegen $\log (m - 1) = \log 1 = 0$

$$\log 2 = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} \text{ etc.}$$

Oder wenn man die sehr stark convergirende Reihe mit K bezeichnet

$$\log 2 = \frac{1}{2} \log 3 + K.$$

7. Ferner ist für $m = 3$, wegen $\log (m + 1) = l4 = 2l2$

$$\log 3 = \frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} \text{ etc.}$$

Oder wenn diese stark convergirende Reihe mit L bezeichnet wird

$$\log 3 = \frac{3}{2} \log 2 + L.$$

8. Substituirt man diesen Werth in (6) statt log 3, so erhält man

$$\log 2 = \frac{3}{4} \log 2 + \frac{1}{2} L + K;$$

demnach

$$\log 2 = 2L + 4K = 2(L + 2K).$$

Weil nun L und K sich leicht berechnen lassen, so ist hiemit zuerst log 2 gefunden; mithin in (7) auch log 3.

9. Setzt man nun ferner m = 5, so wird (5)

$$\log 5 = \frac{1}{2}(l4 + l6) + \frac{1}{49} + \frac{1}{3 \cdot 49^3} + \frac{1}{5 \cdot 49^5} \text{ ꝛc.}$$

Und für m = 7

$$\log 7 = \frac{1}{2}(l6 + l8) + \frac{1}{97} + \frac{1}{3 \cdot 97^3} + \frac{1}{5 \cdot 97^5} \text{ ꝛc.}$$

u. s. w.

10. Man sieht, daß diese Reihen immer desto schneller convergiren, je größer m ist, und folglich für je größere Primzahlen man die Logarithmen sucht, so daß sehr bald nur die ersten Glieder solcher Reihen hinlänglich sind, die Logarithmen auf 7 und mehrere Decimalstellen zu erhalten. Zugleich erhellet aus den angeführten Beyspielen, daß log 4, log 6, log 8 bereits aus log 2; log 3 als gefunden angesehen werden können u. s. w.

So wäre es also ein Leichtes gewesen, vermittelst der Formel (5) die Logarithmentafeln zu berechnen.

11. Da in (3) für M = 1

$$\log nat N = 2\left(\frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^5 \text{ıc.}\right)$$

Hingegen für ein anderes System z. B. das Briggische

$$\log brigg N = 2M\left(\frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^5 \text{ıc.}\right)$$

So folgt hieraus

$$\log brigg N = M \log nat N$$

d. h. Man darf nur den natürlichen Logarithmen einer Zahl N in den Modulus M, der einem andern z. B. dem Briggischen Systeme zukömmt, multipliciren, um den Logarithmus dieser Zahl für das andere System zu erhalten.

11. Hieraus findet sich umgekehrt der Modulus M für ein gewisses System, wenn man den Logarithmen einer gewissen Zahl in diesem Systeme, mit dem natürlichen Logarithmen eben dieser Zahl dividirt. Z. B. für das Briggische System

$$M = \frac{\log brigg N}{\log nat N}$$

Für

Für das Briggische System ist für N = 10, log brigg 10 = 1. Mithin für dieses System

$$M = \frac{1}{\log nat\ 10}$$

Aber log nat 10 hat man = 2,302585092994 gefunden. (Z. B. nach (8) aus log 2 + log 5, oder nach andern Methoden. M. s. Euleri *Introduct. in Anal. Inf.* P. I. (§. 123), woselbst log nat 10 bis auf 25 Decimalstellen angegeben ist). Dies giebt nach gehöriger Rechnung den Modulus M des Briggischen Systems = 0,434294480903. (M. s. Eul. a. a. O. §. 124.)

Zweytes Beyspiel. 1. Es sey in der Taylorischen Formel y eine Exponentialgröße = a^x, wo a unveränderlich sey, so ergiebt sich $dy = a^x dx \log a$, wo unter log a der natürliche verstanden wird; also

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a; \text{ Hieraus weiter}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(a^x \log a)}{dx} = a^x (\log a)^2.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d[a^x (\log a)^2]}{dx} = a^x (\log a)^3$$

u. s. w. Mithin Y oder

$$a^{x+c} = a^x \left(1 + \frac{c \log a}{1} + \frac{c^2 (\log a)^2}{1.2} + \frac{c^3 (\log a)^3}{1.2.3} \text{ etc.}\right)$$

von

von welcher Reihe das Gesetz klar vor Augen liegt.

2. Dividirt man auf beyden Seiten mit a^x, so hat man auch

$$a^c = 1 + c\log a + \frac{c^2(\log a)^2}{1.2} + \frac{c^3(\log a)^3}{1.2.3} \text{ etc.}$$

3. Diese Reihe bekömmt eine andere Form, wenn man $a^c = u$ setzt; dann hat man für natürliche Logarithmen, welche hier beständig verstanden werden (§. 26), $c \log a = \log u$, folglich

$$u = 1 + \frac{\log u}{1} + \frac{(\log u)^2}{1.2} + \frac{(\log u)^3}{1.2.3} \text{ etc.}$$

eine sehr nützliche Reihe, welche zeigt, wie aus dem natürlichen Logarithmen einer Zahl u, die Zahl u selbst bestimmt wird.

4. Setzt man in (2) $a = e =$ der Basis des natürlichen Systems (§. 23), so hat man $\log a = \log e = 1$. Mithin

$$e^c = 1 + c + \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^3}{1.2.3} \text{ etc.}$$

Oder wenn man statt c den Buchstaben z setzen will

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} \text{ etc.}$$

5.

5. Für z = 1 würde dann

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

welche Reihe für die Basis e des natürlichen Logarithmensystems den Werth e = 2,718281828459 giebt. (Eul. *Intr.* L. I. §. 122.)

Drittes Beyspiel. 1. Es sey in der Taylorischen Reihe

$y = \sin x$; so wird

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad (\S.\ 38.\ \text{das dortige } \varphi = x \text{ gesetzt})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad (\S.\ 40.)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d(-\sin x)}{dx} = -\frac{d \sin x}{dx} = -\cos x$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d(-\cos x)}{dx} = -\frac{d \cos x}{dx} = +\sin x;$$

jetzt kömmt in den nächstfolgenden Differenzialquotienten wieder dieselbe Folge von Zeichen, und man erhält

$$\sin(x+c) = \sin x + c.\cos x - \frac{c^2 \sin x}{1.2} - \frac{c^3 \cos x}{1.2.3} + \frac{c^4 \sin x}{1.2.3.4} + \frac{c^5 \cos x}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

2.

2. Auf eine ähnliche Art findet man für $y = \cos x$, den Werth von Y oder

$$\cos(x+c) = \cos x - c \sin x - \frac{c^2 \cos x}{1.2} + \frac{c^3 \sin x}{1.2.3} + \frac{c^4 \cos x}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

3. Aus diesen Formeln ergeben sich Reihen, den Sinus oder Cosinus eines Bogens aus dem Bogen selbst zu finden, der aber alsdann in Decimaltheilen des Halbmessers, gegeben seyn muß. Denn setzt man $x = 0$, so wird $\sin x = 0$; und $\cos x = 1$. Demnach

$$\sin c = c - \frac{c^3}{1.2.3} + \frac{c^5}{1.2.3.4.5} - \frac{c^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \text{ꝛc.}$$

$$\cos c = 1 - \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^4}{1.2.3.4} - \frac{c^6}{1.2\ldots6} - \text{ꝛc.}$$

Ist also der Bogen c in Decimaltheilchen des Halbmessers 1 gegeben, so erhält man auch $\sin c$, und $\cos c$ in solchen Theilchen. Diese Formeln sind sonst von mannichfaltigem Gebrauche.

4. Man kann sie auch aus den imaginären Ausdrücken (§. 48. V.) ableiten. Man setze erstlich in [Beysp. II. (4)] das dortige $z = \varphi\sqrt{-1}$; so ist $z^2 = -\varphi^2$; $z^3 = -\varphi^3\sqrt{-1}$; $z^4 = \varphi^4$ u. s. w. also

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = 1 + \varphi\sqrt{-1} - \frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} \text{ ꝛc.}$$

Und eben so, $z = -\varphi\sqrt{-1}$ gesetzt;

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 1 - \varphi\sqrt{-1} - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} \text{ ꝛc.}$$

Demnach (§. 48. V.)

$$\sin\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \text{ꝛc.}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

welches dieselben Reihen (3) sind, wenn man φ statt des dortigen c setzt.

5. Es erhellet hieraus zugleich, wie das Unmögliche oder Imaginäre in den Ausdrücken wie (§. 48.) nur scheinbar ist, und bey der gehörigen Verwandlung dieser Ausdrücke in Reihen, völlig verschwindet.

6. So verhält es sich auch z. B. mit dem Ausdrucke (§. 48. I.)

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \tang\varphi\sqrt{-1}}{1 - \tang\varphi\sqrt{-1}}.$$

Man setze in Beyspiel I. (2) in der Reihe für $\log\frac{1+u}{1-u}$, worunter ich den natürlichen Logarithmen verstehe, $u = \tang\varphi . \sqrt{-1}$; $M = 1$; so wird

wird $u^3 = - \text{tang}\,\varphi^3 \,.\, \sqrt{-1}$; $u^5 = + \text{tang}\,\varphi^5 \sqrt{-1}$ ꝛc.; und man erhält

$$\log \frac{1 + \text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1 - \text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\left(t\varphi - \frac{t\varphi^3}{3} + \frac{t\varphi^5}{5} \text{ ꝛc.}\right)$$

Demnach

$$\varphi = \text{tang}\,\varphi - \frac{1}{3}\,\text{tang}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\,\text{tang}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\,\text{tang}\,\varphi^7 \text{ ꝛc.}$$

Eine Reihe, worinn nichts imaginäres vorkömmt, und welche zeigt, wie der Bogen φ aus dessen Tangente berechnet werden könnte.

Ist z. B. $\varphi = 45^\circ$ also $\text{tang}\,\varphi = 1$, so wäre

$$\varphi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{ ꝛc.}$$

Die bekannte Leibnitzische Reihe, wodurch der Bogen von 45° in Theilen des Halbmessers 1 gefunden werden kann. Aber freylich nähert sich diese Reihe nur langsam. Setzte man dagegen $\varphi = 30^\circ$; also $\text{tang}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, so wird

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} + \frac{1}{7\cdot 3^3} + \text{ ꝛc.}\right)$$

Eine Reihe, welche sich schon ziemlich schnell nähert. Durch solche und ähnliche Reihen hat man das Verhältniß des Halbmessers 1 zum Halbkreise π, oder auch das Verhältniß des Durchmessers zum Um-

fange gefunden, wovon aber die weitere Ausführung nicht hieher gehört. M. s. Eul. *An. Infin.*

7. Bey dieser Gelegenheit können noch ein paar andere Folgerungen aus den für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ gefundenen Reihen (4) beygebracht werden. Wegen

$$\sin\varphi = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^6}{1.2..6.7} \text{ etc.}\right)$$

folgt, daß weil die in φ multiplicirte Reihe lauter gerade Exponenten hat, sie sich in lauter Factoren von der Form $1 - \alpha\varphi^2$; $1 - \beta\varphi^2$; $1 - \gamma\varphi^2$ u. s. w. muß zerfällen lassen. Ich will jene Reihe mit S bezeichnen und also

$$\sin\varphi = \varphi \cdot S = \varphi\,(1-\alpha\varphi^2)\,(1-\beta\varphi^2)\,(1-\gamma\varphi^2) \text{ u. s. w.}$$

setzen.

Weil nun $\sin\varphi = 0$ wird nicht allein für $\varphi = 0$, sondern auch für $\varphi = \pi$; $\varphi = 2\pi$; $\varphi = 3\pi$ etc., wo π den halben Umkreis bedeutet, so wird sich hieraus das Mittel darbieten, der Ordnung nach, die angenommenen Coefficienten α, β, γ etc. zu bestimmen.

Man setze erstlich $\varphi = 0$, so ist auch $\varphi . S$ oder $\sin\varphi = 0$ wie sichs gebühret.

Da nun aber auch $\sin\varphi$ d. h. $\varphi . S = 0$ wird, für $\varphi = \pi$, so erhellet, daß unter den Factoren von S einer vorhanden seyn muß, welcher für $\varphi = \pi$

verschwindet. Man setze, da es gleichgültig ist, welchen Factor man wählen will, daß sogleich der erste $1 - \alpha\varphi^2$ für $\varphi = \pi$ verschwindet, so hat man $1 - \alpha\pi^2 = 0$, also $\alpha = \frac{1}{\pi^2}$.

Nun wird $\sin\varphi$ oder $\varphi . S$ auch $= 0$ für $\varphi = 2\pi$. Also muß für diesen Werth einer der folgenden Factoren von S verschwinden. Man setze, es sey $1 - \beta\varphi^2$, so hat man $\varphi = 2\pi$ gesetzt $1 - 4\beta\pi^2 = 0$, demnach $\beta = \frac{1}{4\pi^2}$.

Setzt man diese Schlüsse für $\varphi = 3\pi$; $\varphi = 4\pi$ u. s. w. fort, so erhält man $1 - 9\gamma\pi^2 = 0$; $1 - 16\delta\pi^2 = 0$ u. s. w.; oder $\gamma = \frac{1}{9\pi^2}$; $\delta = \frac{1}{16\pi^2}$ u. s. w. Mithin

$$\sin\varphi = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{9\pi^2}\right) \text{etc.}$$

Oder auch wegen

$$1 - \frac{\varphi^2}{\pi^2} = \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{\pi}\right)$$

$$1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2} = \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

u. s. w.

den Werth von

$$\sin\varphi = \varphi\left(1-\frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1+\frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)\ldots\left(1-\frac{\varphi}{n\pi}\right)\left(1+\frac{\varphi}{n\pi}\right) \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe von Factoren geht begreiflich ohne Ende fort, weil die Reihe S ohne Ende fortläuft.

8. Auf eine ähnliche Art läßt sich auch die Reihe für den Cosinus (4) in Faktoren zerfällen, und man erhält, weil $\cos\varphi = 0$ wird für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{5}{2}\pi$ u. s. w. nach demselben Verfahren

$$\cos\varphi = \left(1-\frac{4\varphi^2}{1.\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\varphi^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\varphi^2}{25\pi^2}\right)..$$

wo 1, 9, 25 ꝛc. der Ordnung nach, die Quadrate der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ꝛc. sind.

Sodann auch wegen

$$1-\frac{4\varphi^2}{1.\pi^2} = \left(1-\frac{2\varphi}{\pi}\right)\left(1+\frac{2\varphi}{\pi}\right)$$

$$1-\frac{4\varphi^2}{9\pi^2} = \left(1-\frac{2\varphi}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2\varphi}{3\pi}\right)$$

den Werth von

$$\cos\varphi = \left(1-\frac{2\varphi}{\pi}\right)\left(1+\frac{2\varphi}{\pi}\right)\left(1-\frac{2\varphi}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2\varphi}{3\pi}\right) \text{ꝛc.}$$

wo $1 \mp \frac{2\varphi}{(2n+1)\pi}$ das allgemeine Glied, dieser ohne Ende fortlaufenden Factoren ist.

Aus diesen Sätzen lassen sich viel andere merkwürdige ableiten, worüber man Euleri *Introd. in Anal. Infinit.* T. I. Cap. XI. nachsehen kann. Ich habe hier nur den weitläuftigen Gebrauch der Taylorischen Formel, Funktionen in Reihen zu verwandeln, in einigen der vorzüglichsten Beyspielen zeigen wollen. Sonst lassen sich die angeführten Sätze aus viel anderen Principien ableiten. Den Nutzen der Taylorischen Formel zur Summirung der Reihen zeigt Euler *Inst. Calc. diff.* Cap. V. VI. VII.

Folgende Aufgabe ist eine Erweiterung des Taylorischen Lehrsatzes, welche wir Hrn. La Grange verdanken.

§. 75.

Aufgabe.

Es sey φx eine Funktion von x und zwischen den 3 veränderlichen Größen x, y, z eine Gleichung von der Form

$$x = y + z\varphi x$$

vorgegeben, man soll die Funktion φx durch y und z ausdrücken.

Aufl. I. Wegen $x = y + z\varphi x$ hat man erstlich $\varphi x = \varphi(y + z\varphi x)$

und nun nach dem Taylorischen Lehrsatz (§. 72.) das dortige $c = z\varphi x$ gesetzt

$$\varphi(y+z\varphi x)=\varphi y+\frac{d\varphi y}{dy}z\varphi x+\frac{d^2\varphi y}{1.2dy^2}z^2(\varphi x)^2 \text{ etc.}$$

II. Oder wenn man der Kürze halber

$$\varphi y = Y;\ \frac{d\varphi y}{dy}=Y';\ \frac{d^2\varphi y}{1.2dy^2}=Y'';\ \frac{d^3y}{1.2.3dy^3}=Y'''$$

u. s. w. setzt, $\varphi(y+z\varphi x)$ oder (I)

$$\varphi x = Y + Y'z\varphi x + Y''z^2(\varphi x)^2 + Y'''z^3(\varphi x)^3 \text{ etc.}$$

III. Die Gestalt dieser Reihe, in der hier von φx und z lauter Potenzen von ganzen Exponenten, und zwar nach der Ordnung der natürlichen Zahlen vorkommen, verstattet durch Umkehrung, für φx folgende nach den Potenzen von z fortgesetzte Reihe anzunehmen

$$\varphi x = A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 \text{ u. s. w.}$$

in der die Coefficienten A, A', A'' etc. durch die Coefficienten Y, Y', Y'' etc. der Reihe (II) d. h. durch Funktionen von y gefunden werden können.

IV. Man mache nemlich von der Reihe (III) der Ordnung nach, die Potenzen, und setze der Kürze halber

$$(\varphi x)^2 = B + B'z + B''z^2 + B'''z^3 \ldots$$
$$(\varphi x)^3 = C + C'z + C''z^2 + C'''z^3 \ldots$$
$$(\varphi x)^4 = D + D'z + D''z^2 + D'''z^4 \ldots$$

so

so werden diese Coefficienten sämmtlich durch A, A', A'' rc. bestimmt seyn. Z. B.

$$B = A^2$$
$$B' = 2A'A;\ B'' = (A')^2 + 2AA''$$
$$C = A^3;\quad C' = 3A^2A'$$
$$D = A^4 \text{ u. s. w.}$$

V. Substituirt man nun diese Reihen überall statt φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$ in die Reihe (II) und ordnet die Glieder nach den Potenzen von z, so erhält man (II. III.)

$$\varphi x \text{ oder } A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + A''''z^4 \text{ u. s. w.}$$
$$= Y + AY'z + \left.\begin{array}{l} A'Y' \\ +BY'' \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} A''Y' \\ +B'Y'' \\ +CY''' \end{array}\right\} z^3 + \left.\begin{array}{l} A'''Y' \\ +B''Y'' \\ +C'Y''' \\ +DY'''' \end{array}\right\} z^4 \text{ u. s. w.}$$

Demnach durch Vergleichung der Coefficienten, welche in beyden Reihen zu einerley Potenzen von z gehören

$$A = Y$$
$$A' = A\,Y'$$
$$A'' = A'\,Y' + BY''$$
$$A''' = A''\,Y' + B'Y'' + C\,Y'''$$
$$A'''' = A'''\,Y' + B''Y'' + C'Y''' + DY'''$$

u. s. w.

von welchen Ausdrücken das Gesetz des Fortgangs klar vor Augen liegt.

VI. Substituirt man nun statt Y, Y', Y'', ꝛc. die obigen Werthe (II), so wie statt B, B', C, C' ꝛc. die Werthe (IV.), so erhält man nach und nach die Werthe der angenommenen Coefficienten A, A' ꝛc. wie folget. Erstlich

$$A = Y = \varphi y. \quad \text{(I.)}$$

wo denn φy eine Funktion von y bedeutet, welche derjenigen, welche mit φx bezeichnet ist, völlig ähnlich ist, so daß φy sich von φx nur in dem Buchstaben, womit die veränderliche Größe bezeichnet ist, unterscheidet. Z. B. wenn $\varphi x = \alpha x + \beta x^3$ wäre, so muß man statt φy setzen $\alpha y + \beta y^3$, und so in andern Fällen.

Ferner wird

$$A' = A Y' = \varphi y . \frac{d\varphi y}{dy} \text{ (I).}$$

Hieraus und aus $B = A^2 = (\varphi y)^2$ ferner

$$A'' = A'Y' + BY''$$

$$= \varphi y \frac{d\varphi y}{dy} . \frac{d\varphi y}{dy} + \frac{(\varphi y)^2 d^2\varphi y}{1.2 dy^2}$$

$$= \frac{d\left((\varphi y)^2 \frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2. dy}$$

Setzet

Setzet man diese Rechnungen weiter fort, so erhält man

$$A''' = \frac{d^2\left((\varphi y)^3 \frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2.3\, dy^2}$$

u. s. w. Demnach (III)

$$\varphi x = \varphi y + \varphi y \frac{d\varphi y}{dy} z + \frac{d\left((\varphi y)^2 \frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2.\, dy} z^2 \text{ ꝛc.}$$

eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$A^N = \frac{d^{n-1}\left((\varphi y)^n \frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2.3\ldots n.\, dy^{n-1}}$$

seyn wird, wie wir bald hernach auf eine Art beweisen werden, welche die Richtigkeit dieses allgemeinen Ausdrucks leichter, als durch eine Ableitung desselben, aus den Gleichungen (V) übersehen läßt. Indessen sind diese Gleichungen vortheilhaft für die Ausübung zu gebrauchen, weil es in vielen Fällen leichter ist, jeden folgenden Coefficienten aus den bereits gefundenen vorhergehenden zu bestimmen, als jeden besonders aus der directen Formel

$$A^N = \frac{d^{n-1}\left((\varphi y)^n \frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2.3\ldots n\, dy^{n-1}}$$

wofür auch wegen $(\varphi y)^n \frac{d\varphi y}{dy} = \frac{1}{n+1} \frac{d(\varphi y)^{n+1}}{dy}$

A^N

$$A^{N} = \frac{d^{n}(\varphi y)^{n+1}}{1.2.3..n.dy^{n}}$$ gesetzt werden kann, zu berechnen.

§. 76.

Aufgabe.

Wenn wiederum die Gleichung

$$x = y + z\varphi x$$

vorgegeben ist, jede andere Funktion von x, welche fx heißen mag, durch y und z auszudrücken.

Aufl. I. Weil jetzt

$$fx = f(y + z\varphi x)$$

seyn wird, so hat man nach dem Taylorischen Lehrsatze

$$fx = fy + \frac{dfy}{dy} z\varphi x + \frac{d^2 fy}{1.2 dy^2} z^2 (\varphi x)^2 + \text{etc.}$$

oder wenn der Kürze wegen

$$\frac{dfy}{dy} = \mathfrak{y}'; \frac{d^2 fy}{1.2dy^2} = \mathfrak{y}''; \frac{d^3 fy}{1.2.3dy^3} = \mathfrak{y}'''$$

u. s. w. gesetzt wird

$$fx = fy + \mathfrak{y}' z\varphi x + \mathfrak{y}'' z^2 (\varphi x)^2 + \mathfrak{y}''' z^3 (\varphi x)^3.$$

II. Substituirt man nun statt φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$ die Reihe §. 75. III.) so wird nach gehöriger Rechnung

fx

$$fx = fy + A\mathfrak{y}'z + \left.\begin{matrix} A'\mathfrak{y}' \\ + B\mathfrak{y}'' \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} A''\mathfrak{y}' \\ + B'\mathfrak{y}'' \\ + C\mathfrak{y}''' \end{matrix}\right\} z^3 \text{ u. s. w.}$$

wo hier die Coefficienten in z, z^2, z^3 der Form nach denen in (§. 75. V.) völlig ähnlich sind, nur daß statt der dortigen Y', Y'' 2c. hier $\mathfrak{y}'$ $\mathfrak{y}''$ 2c. steht.

III. Substituirt man nun weiter, statt $A, A'..$; $B, B'..$ 2c. die (§. 75.) gefundenen Werthe, so wird

$$A\mathfrak{y}' = \varphi y \frac{dfy}{dy}$$

$$A'\mathfrak{y}' + B\mathfrak{y}'' = \varphi y \frac{d\varphi y}{dy} \frac{dfy}{dy} + (\varphi y)^2 \frac{d^2 fy}{1.2 dy^2}$$

$$= \frac{d(\varphi y)^2}{1.2 dy^2} dfy + (\varphi y)^2 \frac{d^2 fy}{1.2 dy^2}$$

$$= \frac{d\left((\varphi y)^2 \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.dy}$$

IV. Setzt man diese Rechnung weiter fort, so findet sich der Coefficient in z^3 oder

$$A''\mathfrak{y}' + B'\mathfrak{y}'' + C\mathfrak{y}''' = \frac{d^2\left((\varphi y)^3 \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3 dy^2}$$

u. s. w. Demnach (II)

fx

$$fx = fy + \varphi y \frac{dfy}{dy} z + \frac{d\left((\varphi y)^2 \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.dy} z^2 + \text{rc.}$$

in welcher Reihe das zu z^n gehörige allgemeine Glied seyn wird

$$\frac{d^{n-1}\left((\varphi y)^n \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3\ldots n\,dy^{n-1}}$$

V. Um die Richtigkeit dieses aus Induction geschlossenen allgemeinen Ausdrucks, auf eine möglichst kurze und leichte Art zu beweisen, so wollen wir die Coefficienten der für fx (II.) gefundenen Reihe mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ rc. $\mathfrak{A}^N$.. bezeichnen, mithin der Kürze halber

$fx = fy + \mathfrak{A}'z + \mathfrak{A}''z^2 + \mathfrak{A}'''z^3 \ldots + A^N z^n \ldots$

setzen, und nunmehr die Reihe nach z differenziiren, so wird

VI. $\frac{dfx}{dz} = \mathfrak{A}' + 2\mathfrak{A}''z + 3\mathfrak{A}'''z^2 \ldots +$ $nA^N z^{n-1} \ldots$

VII. Nimmt man den Werth dieses Differenzialquotienten für $z = 0$; so hat man

$$\frac{dfx}{dz} = \mathfrak{A}'.$$

Oder es ist $\mathfrak{A}' = \frac{dfx}{dz}$ für $z = 0$.

VIII.

VIII. Man differenziire die Reihe (VI.) abermals, so wird

$$\frac{d^2 fx}{dz^2} = 2.1\,\mathfrak{A}'' + 3.2\,\mathfrak{A}'''z \ldots + n(n-1)\mathfrak{A}^N z^{n-2} \ldots$$

welche Reihe für $z = 0$ sich in $2.1\,\mathfrak{A}''$ verwandelt. Also ist

$$\mathfrak{A}'' = \frac{d^2 fx}{1.2\,dz^2} \text{ für } z = 0.$$

IX. So wird ferner durch abermahlige Differenziation

$$\frac{d^3 fx}{dz^3} = 3.2.1\,\mathfrak{A}''' + 4.3.2\,\mathfrak{A}^{IV} z \ldots + n(n-1)(n-2)\mathfrak{A}^N z^{n-3}$$

Mithin für $z = 0$

$$\frac{d^3 fx}{dz^3} = 3.2.1\,\mathfrak{A}''' \text{ oder}$$

$$\mathfrak{A}''' = \frac{d^3 fx}{1.2.3.dz^3} \text{ für } z = 0.$$

X. Hieraus sieht man leicht, daß allgemein $\mathfrak{A}^N$ = dem Werthe des n^{ten} Differenzialquotienten

$$\frac{d^n fx}{1.2.3..n dz^n} \text{ für } z = 0 \text{ gleich seyn wird.}$$

XI. Es kömmt also jetzt darauf an, die Werthe der Differenzialquotienten

$$\frac{dfx}{dz};\ \frac{d^2 fx}{dz^2}; \ldots \frac{d^n fx}{dz^n},$$

für

für $z = 0$ zu bestimmen, um der Ordnung nach die Coefficienten $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{A}''$.. $\mathfrak{A}^N$ zu erhalten.

XII. Hiezu bietet sich folgendes Verfahren dar. Man differenziire die in der Aufgabe vorgegebene Gleichung $x = y + z\varphi x$, so erhält man

$$dx = dy + z.d\varphi x + \varphi x.dz$$

oder wenn man $d\varphi x = \varphi' x.dx$ setzt

$$(1 - z\varphi' x)\, dx = dy + \varphi x dz.$$

Also $$dx = \frac{dy}{1 - z\varphi' x} + \frac{\varphi x}{1 - z\varphi' x}\, dz.$$

XIII. Man multiplicire auf beyden Seiten mit $\frac{dfx}{dx}$, so wird

$$dfx = R dy + S dz$$

wenn man der Kürze halber

$$\frac{dfx}{dx(1 - z\varphi' x)} = R \text{ und } \frac{\varphi x.dfx}{dx(1 - z\varphi' x)} = S$$

nennt.

XIV. Würde man hier dfx so nehmen, daß blos z als veränderlich angesehen würde, so wäre $dy = 0$, und man hätte nach der Bezeichnungsart (§. 17. IV.) den partiellen Differenzialquotienten

$$\left(\frac{dfx}{dz}\right) = S.$$

XV. Würde man aber dfx so nehmen, daß bloß y veränderlich gesetzt würde, also $dz = 0$ wäre, so hätte man

$$\left(\frac{dfx}{dy}\right) = R.$$

XVI. Nun ist aber wie aus (XIII.) leicht erhellet $S = \varphi x \, . \, R.$ Mithin

$$\left(\frac{dfx}{dz}\right) = \varphi x \, . \left(\frac{dfx}{dy}\right). \text{ (XIV. XV.)}$$

XVII. Auf eine völlig ähnliche Art erhält man, wenn die Gleichung (XII.) auf beyden Seiten statt mit $\frac{dfx}{dx}$ (XIII), mit $\frac{d\varphi x}{dx}$ multiplicirt wird

$$\left(\frac{d\varphi x}{dz}\right) = \varphi x \left(\frac{d\varphi x}{dy}\right).$$

XVIII. Man setze der Kürze halber $\varphi x = u$; $fx = w$, so hat man die beyden Gleichungen.

XIX. $$\left(\frac{dw}{dz}\right) = u \left(\frac{dw}{dy}\right) \text{ (XVI.)}$$

XX. $$\left(\frac{du}{dz}\right) = u \left(\frac{du}{dy}\right) \text{ (XVII.)}$$

XXI. Man differenziire die Gleichung XIX. von neuen nach z, so wird

$$\left(\frac{ddw}{dz^2}\right) \text{ oder } \left(\frac{ddfx}{dz^2}\right) = u\left(\frac{d\left(\frac{dw}{dy}\right)}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dy}\right) \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$$

XXII. Aber aus (§. 58. Anm. u. §. 66.) ist

$$\left(\frac{d\left(\frac{dw}{dy}\right)}{dz}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{dw}{dz}\right)}{dy}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{dw}{dy}\right)u}{dy}\right). \text{ (XIX.)}$$

$$= u\left(\frac{ddw}{dy^2}\right) + \left(\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)$$

Setzt man nun in die Gleichung (XXI) zugleich statt $\left(\frac{du}{dz}\right)$ seinen Werth aus (XX) so wird (XXI)

$$\left(\frac{ddfx}{dz^2}\right) = u^2\left(\frac{ddw}{dy^2}\right) + 2u\left(\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$= \left(\frac{d\left(u^2\left(\frac{dw}{dy}\right)\right)}{dy}\right) = \left(\frac{d\left((\varphi x)^2\left(\frac{dfx}{dy}\right)\right)}{dy}\right)$$

wofür der Kürze halber auch bloß

$$\frac{d\left((\varphi x)^2 \frac{dfx}{dy}\right)}{dy}$$

geschrieben werden kann (§. 66. IX.)

XXIII. Es erhellet, daß sich diese Rechnung wiederhohlen läßt, und daß allgemein

$$\left(\frac{d^n fx}{dz^n}\right) = \frac{d^{n-1}\left((\varphi x)^n \frac{dfx}{dy}\right)}{dy^{n-1}}$$

seyn wird.

Um

Um dies indessen vollkommen genügend darzuthun, so setze man, diese Gleichung gelte für ein bestimmtes n, wie z. B. in (XVI) für $n = 1$, in (XXII.) für $n = 2$, und es wird sich leicht beweisen lassen, daß sie auch für das nächst höhere n, also für $n + 1$ gelten wird.

XXIV. Man setze für ϕx, fx wieder die obigen Buchstaben u, w, und nehme also an, es sey

$$\left(\frac{d^n w}{d z^n}\right) = \frac{d^{n-1}\left(u^n\left(\frac{dw}{dy}\right)\right)}{d y^{n-1}} = \frac{d^{n-1} U}{d y^{n-1}}$$

wo $u^n\left(\frac{dw}{dy}\right)$ der Kürze halber mit U bezeichnet ist.

XXV. Differenziirt man von neuen nach z, so wird

$$\left(\frac{d^{n+1} w}{d z^{n+1}}\right) = \left(\frac{d\,\frac{d^{n-1} U}{d y^{n-1}}}{d z}\right) = \left(\frac{d^{n-1}\left(\frac{dU}{dz}\right)}{d y^{n-1}}\right)$$

nach (§. 66.)

XXVI. Aber (XXIV.)

$$\left(\frac{dU}{dz}\right) = u^n\left(\frac{d\left(\frac{dw}{dy}\right)}{dz}\right) + n u^{n-1}\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

Oder statt $\left(\frac{d\left(\frac{dw}{dy}\right)}{dz}\right)$, und $\left(\frac{du}{dz}\right)$ die Werthe aus (XXII) (XX) gesetzt

$$\left(\frac{dU}{dz}\right) = u^{n+1}\left(\frac{ddw}{dy^2}\right) + u^n\left(\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) + n\,u^n\left(\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$= u^{n+1}\left(\frac{ddw}{dy^2}\right) + (n+1)u^n\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

d. h.

$$\left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{d\left(u^{n+1}\left(\frac{dw}{dy}\right)\right)}{dy}\right)$$

Mithin (XXV. u. §. 66. IX)

$$\left(\frac{d^{n+1}w}{dz^{n+1}}\right) = \frac{d^n\left(u^{n+1}\left(\frac{dw}{dy}\right)\right)}{dy^n}$$

Oder

$$\frac{d^{n+1}fx}{dz^{n+1}} = \frac{d^n\left((\varphi x)^{n+1}\cdot\frac{dfx}{dy}\right)}{dy^n}$$

Man sieht also, daß der Satz (XXIII) auch für $n+1$ seine Richtigkeit hat, und also allgemein wahr ist.

XXVII. Aber um jeden Coefficienten wie A^n zu erhalten, muß man das Differenzial $\frac{d^n fx}{dz^n}$ für $z=0$ nehmen (X), und mit $1.2.3..n$ dividiren.

Da nun aber vermöge der Gleichung

$$x = y + z\varphi x$$

für $z=0$; $x=y$ wird, mithin auch $fx = fy$; $\varphi x = \varphi y$, so hat man (XXIII) den Werth von

I

$$\frac{1}{1.2.3..n} \cdot \left(\frac{d^n fx}{dz^n}\right) \text{ für } z = 0$$

d. h.

$$\mathfrak{A}^N = \frac{d^{n-1}\left((\varphi y)^n \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3..n.dy^{n-1}}$$

Mithin hat das Gesetz der Reihe (IV) für fx seine vollkommene Richtigkeit.

Setzt man φy statt fy, so hat man den speciellen Fall der Aufgabe (§. 75.) für welche denn der für A^N (das. VII) gegebene allgemeine Ausdruck gleichfalls durch die bisherige Rechnung erwiesen ist.

§. 77.

Beyspiele.

Beysp. I. Um das bisherige durch ein paar Beyspiele zu erläutern, so sey die Gleichung

$$x = y + zx^m$$

vorgegeben, man soll x durch y und z finden.

Weil also die durch y und z auszudrückende Funktion von x, die Größe x selbst seyn soll, so hat man $fx = x$; mithin auch $fy = y$; ferner ist $\varphi x = x^m$, also auch $\varphi y = y^m$ (§. 75. VI.)

Dies giebt erstlich $\frac{dfy}{dy} = \frac{dy}{dy} = 1$, und folglich fx oder

$$x = y + y^m z + \frac{d(y^{2m})}{1.2dy} z^2 + \frac{d^2(y^{3m})}{1.2.3dy^2} z^3 \text{ ꝛc.}$$

Aber $d(y^{2m}) = 2my^{2m-1}\,dy$

$d(y^{3m}) = 3my^{3m-1}\,dy$, und nochmahls differenziirt $d^2(y^{3m}) = 3m(3m-1)y^{3m-2}\,dy^2$ u. s. w. Folglich

$$x = y + y^m z + \frac{2m}{1.2} y^{2m-1} z^2$$
$$+ \frac{3m(3m-1)}{1.2.3} y^{3m-2} z^3$$
$$+ \frac{4m(4m-1)(4m-2)}{1.2.3.4} y^{4m-3} z^4$$

u. s. w.

Da diese Reihe für gegebene Werthe von z und y offenbar eine Wurzel der Gleichung $x = y + zx^m$ darstellt, so erhellet, daß der Lehrsatz (§. 76.) dienen kann, Wurzeln von Gleichungen zu finden. Aber die vollständige Ausführung hievon gehört nicht hieher, und läßt sich auch hier in der Kürze nicht entwickeln, zumahl wenn von allen Wurzeln der Gleichung die Rede ist. Man s. indessen hierüber La Grange in den *Mem. de l'Acad. de Berlin* 1768, womit auch Lamberts Abhandlung

lung in den *Actis Helveticis* 1757 verglichen werden kann.

So erhellet denn leicht, daß wenn für φx eine beliebige nach den Potenzen von x fortgehende Reihe gesetzt wird, der bisherige Lehrsatz auch das allgemeine Problem der Umkehrung der Reihen auflöst. M. s. hierüber Hrn. Hofrath J. F. Pfaffs Abhandl. in dem Hindenburgischen Archiv der Math. 1. Heft. Abhandl. VI. Auch dessen *Disquis. analyt. in tractatu de reversione serierum* §. IV. seq.

II. Beyspiel. Es sey aus der Gleichung

$$\psi = \omega - e \sin \psi$$

der Winkel ψ durch ω, oder in der Astronomie die excentrische Anomalie ψ aus der mittlern Anomalie ω, und der Excentricität e der Planetenbahn zu bestimmen, für welche 3 Größen gedachte Gleichung herauskömmt, wenn die Winkel ω, ψ von der Sonnenferne angerechnet werden.

Man setze demnach in obige Formel (§. 76.)

$x = \psi$; $y = \omega$; $z = e$

$fx = \psi$; $fy = \omega$; $\varphi x = \sin \psi$; $\varphi y = \sin \omega$ (§. 75. VI.)

so wird $\frac{dfy}{dy} = \frac{d\omega}{d\omega} = 1$, und die Reihe (§. 76. IV.) verwandelt sich in

$$\psi = \omega - e \sin\omega + \frac{e^2}{1.2}\frac{d(\sin\omega)^2}{d\omega} - \frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2(\sin\omega)^3}{d\omega^2} \text{ ꝛc.}$$

Es kömmt also nur noch darauf an, die Werthe der in dieser Reihe vorkommenden Differenzialquotienten für den astronomischen Gebrauch auf die möglichst bequeme Weise zu entwickeln, und zum Behufe der numerischen Berechnung einzurichten. Da aber die weitere Ausführung hievon für die Astronomie gehört, so war es hier hinlänglich, die Anwendung des Lehrsatzes (§. 76.) nur im allgemeinen gezeigt zu haben.

Zweytes Kapitel.

Einige Anwendungen der Differenzialrechnung.

Ohngeachtet schon in den bisher gegebenen Beyspielen zu diesen oder jenen Lehrsätzen und Aufgaben, allerley nützliche Anwendungen der Differenzialrechnung liegen, so wird es doch so wohl zur genauern Kenntniß des wahren Geistes dieser Rechnung selbst, als auch ihres mannigfaltigen Gebrauchs nicht überflüssig seyn, noch verschiedenes Hiehergehörige beyzubringen, und insbesondere auch den Nutzen derselben in der höheren Geometrie durch einige Aufgaben zu erläutern.

§. 78.

§. 78.

Aufgabe.

Eine Reihe $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$ u. s. w. auf eine beliebige Potenz m zu erheben, wo die griechischen Buchstaben gegebene Coefficienten bedeuten.

Aufl. I. Man setze jene Reihe $= 1 + y$ und ihre Potenz m sey $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3$ u. s. w., welche Form sie nothwendig haben muß. Man sucht die Coefficienten A, B, C zc.

II. Ich will $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots = w$ nennen. Also soll seyn

$$(1 + y)^m = w.$$

Dies giebt durch Differenziation

$$m(1 + y)^{m-1} dy = dw$$

oder auf beyden Seiten mit $1 + y$ multiplicirt.

$$m(1 + y)^m dy = (1 + y) dw$$

d. h. $mw dy = (1 + y) dw.$

III. Dies giebt

$$\frac{mw dy}{dx} = (1 + y) \frac{dw}{dx}.$$

IV. Nun ist

$$\frac{dw}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 \ldots.$$

V. Also mit $1 + y$ oder $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots$ multiplicirt

$$(1+y)\frac{dw}{dx} = A + \left.\begin{matrix} A\alpha \\ +2B \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A\beta \\ +2B\alpha \\ +3C \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} A\gamma \\ +2B\beta \\ +3C\alpha \\ +4D \end{matrix}\right\} x^3$$

u. s. w.

VI. Ferner ist

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 \text{ etc.}$$

welches mit $mw = m + mAx + mBx^2 +$ etc. multiplicirt

$$mw\frac{dy}{dx} = \left.\begin{matrix} m\alpha + 2m\beta \\ + mA\alpha \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 3m\gamma \\ +2mA\beta \\ +mB\alpha \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4m\delta \\ +3mA\gamma \\ +2mB\beta \\ +mC\alpha \end{matrix}\right\} x^3$$

u. s. w.

giebt.

VII. Da nun beyde für $(1+y)\frac{dw}{dx}$ und $mw\frac{dy}{dx}$ gefundene Reihen nach (III) einander gleich sind, so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten, welche in beyden Reihen zu einerley Potenz von x gehören,

$$A = m\alpha$$

$$A\alpha + 2B = 2m\beta + mA\alpha$$

$$A\beta + 2B\alpha + 3C = 3m\gamma + 2mA\beta + mB\alpha$$

u. s. w.

Woraus

$$A = m\alpha$$

$$B = \frac{(m-1)A\alpha + 2m\beta}{2}$$

$$C = \frac{(m-2)B\alpha + (2m-1)A\beta + 3m\gamma}{3}$$

$$D = \frac{(m-3)C\alpha + (2m-2)B\beta + (3m-1)A\gamma + 4m\delta}{4}$$

folgt, von welchen Ausdrücken das Gesetz so klar vor Augen liegt, daß es unnöthig ist, sowohl das allgemeine Glied davon hinzusetzen, als auch dasselbe durch die gewöhnliche Schlußform vom nächstniedrigern zum nächsthöhern zu rechtfertigen.

Man

Man sieht indessen leicht, daß sehr zusammengesetzte Ausdrücke zum Vorschein kommen würden, wenn man nun weiter in dem Werthe von B den Werth von A, sodann ferner die erhaltenen B und A in dem Werthe von C u. s. w. substituiren wollte, um die Coefficienten A, B, C bloß allein durch diejenigen der vorgegebenen Reihe $1 + \alpha x + \beta x^2$ rc. zu bestimmen. Es ist hier hinlänglich, das Gesetz gezeigt zu haben, wie jeder folgende Coefficient der Reihe w, durch die vorhergehenden gefunden werden kann. Vollständigere Entwickelungen gehören für die Combinatorische Analysis, wovon man in mehreren Heften des Hindenburgischen Archivs für reine und angewandte Mathematik, so wie in den über jene Analysis herausgekommenen Schriften das weitere nachsehen kann.

Sammlung combinatorisch analytischer Abhandlungen herausgegeben von Hindenburg. Erste Samml. 1796 (unter dem Titel: der Polynomische Lehrs.) Zweyte 1800.

Töpfer combinatorische Analytik. Leipz. 1793.

Lorenz Syntactik u. d. gl.

VIII. Zusatz. Setzt man $\alpha = 1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$ u. s. w. so erhält man die Potenz m von $1 + x$; und die Coefficienten derselben werden

$$A = m;\ B = \frac{m(m-1)}{1.2};\ C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\ \text{etc.}$$

oder

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

wo m jede ganze, gebrochene und negative Zahl bedeuten kann; denn das Differenzial von $(1+y)^m$ (II) woraus die Gleichung (III) abgeleitet wurde, hat die Form $m(1+y)^{m-1}dy$, es mag m seyn was es will, wie aus den Schlüssen des 12ten und 13ten §es klar ist.

So ist denn durch die Differenzialrechnung der Binomische Lehrsatz allgemein erwiesen.

Aber auch für die Potenz m der polynomischen Größe $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots$ gelten die Formeln (VII) m mag seyn was es will.

§. 79.

Aufgabe.

Es seyen fx, φx beliebige Funktionen von x, deren jede für einen gewissen Werth von x verschwindet, so daß

z. B.

z. B. für $x = a$, so wohl fx als $\varphi x = 0$ werden, man verlangt den Werth des Quotienten $\frac{fx}{\varphi x}$ für jenen Werth von x zu bestimmen.

Aufgl. I. Man lasse x um einen beliebigen Werth $= c$ wachsen, so hat man nach dem Taylorischen Lehrsatz

$$\varphi(x + c) = \varphi x + pc + \frac{qc^2}{1.2} + \frac{rc^3}{1.2.3} \text{ ꝛc.}$$

Wenn man der Kürze wegen die Werthe der Differenzialquotienten $\frac{d\varphi x}{dx}$; $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$; $\frac{d^3\varphi x}{dx^3}$ ꝛc. der Ordnung nach mit p, q, r ꝛc. bezeichnet.

II. Völlig eben so

$$f(x + c) = fx + Pc + \frac{Qc^2}{1.2} + \frac{Rc^3}{1.2.3} \text{ ꝛc.}$$

wenn $\frac{dfx}{dx}$; $\frac{d^2fx}{dx^2}$; $\frac{d^3fx}{dx^3}$ mit P, Q, R ꝛc. bezeichnet werden.

III. Dies giebt

$$\frac{f(x+c)}{\varphi(x+c)} = \frac{fx + Pc + \frac{1}{2}Qc^2 + \frac{1}{6}Rc^3 \ldots}{\varphi x + pc + \frac{1}{2}qc^2 + \frac{1}{6}rc^3 \ldots}$$

IV.

IV. Nun soll für $x=a$, sowohl fa, als $\varphi a = 0$ seyn, folglich hat man a statt x gesetzt,

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{P+\frac{1}{2}Qc+\frac{1}{6}Rc^2\ldots}{p+\frac{1}{2}qc+\frac{1}{6}rc^2\ldots}$$

nachdem man Zähler und Nenner des Bruchs (III) rechter Hand des Gleichheits Zeichens gemeinschaftlich mit c dividirt hat.

V. Jetzt setze man nun auch $c=0$, so wird $\frac{fa}{\varphi a} = \frac{P}{p}$; oder $\frac{P}{p}$ ist der Werth von $\frac{fx}{\varphi x}$ wenn x sich in a, mithin fx sich in fa, und φx in φa, verwandelt, in welchem Falle aber der Voraussetzung gemäß fa und φa zugleich verschwinden sollen.

Man sieht also, daß für diesen Fall, wegen $P=\frac{dfx}{dx}$ und $p=\frac{d\varphi x}{\varphi x}$, der Werth des Quotienten

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{\frac{dfx}{dx}}{\frac{d\varphi x}{dx}} = \frac{dfx}{d\varphi x}$$

ist, wo denn nach geschehener Differenziation, in den Differenzialquotienten $\frac{dfx}{d\varphi x}$ ebenfalls $x=a$ zu setzen ist.

VI.

VI. Nun könnte es aber geschehen, daß der Quotient $\frac{P}{p}$ oder $\frac{dfx}{d\varphi x}$ für $x = a$ auch $= \frac{o}{o}$ würde, d. h. $P = o$ und $p = o$ würden.

In diesem Falle ist in (IV)

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{\frac{1}{2}Qc + \frac{1}{6}Rc^2 \ldots}{\frac{1}{2}qc + \frac{1}{6}rc^2} = \frac{Q + \frac{1}{3}Rc^2 \ldots}{q + \frac{1}{3}rc^2}$$

Folglich für $c = o$

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{Q}{q} = \frac{ddfx}{dd\varphi x}$$

oder der Werth von $\frac{fa}{\varphi a}$ ist dem zweyten Differenzialquotienten $\frac{d^2 fx}{d^2 \varphi x}$ für $x = a$ gleich.

VII. Wenn aber auch in diesem sowohl $d^2 fx$, als auch $d^2 \varphi x$ für $x = a$ verschwinden, so siehet man nach ähnlichen Schlüssen leicht, daß alsdann

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{d^3 fx}{d^3 \varphi x}$$

werden würde u. s. w.

Auf solche Art erhält man zuletzt den gesuchten Werth des Quotienten $\frac{fa}{\varphi a}$, der denn entweder endlich ist, oder auch $= o$, oder unendlich groß seyn kann.

§. 80.

Beyspiele.

Beysp. I. Man frägt nach dem Werthe von $\frac{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$ für den Fall, daß $x = 0$ ist. Es erhellet, daß für diesen Fall, sowohl der Zähler als Nenner des vorgegebenen Ausdrucks $= 0$ werden, und demnach der Quotient $\frac{0}{0}$ unbestimmt zu seyn scheint, weil im allgemeinen $\frac{0}{0}$ jeden Werth haben kann. Daß aber dennoch die vorgegebene Funktion $\frac{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$ für $x = 0$ einen bestimmten Werth hat, erhellet daraus, wenn man Zähler und Nenner gemeinschaftlich mit $b + \sqrt{(b^2 - x^2)}$ multiplicirt. Denn es wird

$$\frac{[b - \sqrt{(b^2 - x^2)}]\,[b + \sqrt{(b^2 - x^2)}]}{x^2[b + \sqrt{(b^2 - x^2)}]} = \frac{x^2}{x^2[b + \sqrt{(b^2 - x^2)}]}$$

d. h.

$$\frac{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2} = \frac{1}{b + \sqrt{(b^2 - x^2)}}$$

Also für $x = 0$ wird

$$\frac{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2} = \frac{1}{2b}.$$

Eben dieses wird sich auf dem Wege der Differenziation finden, denn setzt man in (§. 79)

$fx = b - \surd(b^2 - x^2)$; $\varphi x = x^2$, so ist $\frac{P}{p}$ oder

$\frac{dfx}{d\varphi x} = \frac{1}{2\surd(b^2 - x^2)}$; welches für $x = a = 0$

sich in $\frac{1}{2b}$ verwandelt. Daher ist $\frac{fx}{\varphi x}$ oder

$$\frac{b - \surd(b^2 - x^2)}{x^2} = \frac{1}{2b} \text{ für } x = 0.$$

Beyspiel II. Man verlangt den Werth des Quotienten $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ für $x = 1$, für welchen Werth Zähler und Nenner $= 0$ werden, und also $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{0}{0}$ unbestimmt zu seyn scheint.

Jetzt ist also in der Aufgabe des vorhergehenden §es $a = 1$

$fx = x - x^{n+1}$; also $dfx = (1 - (n+1)x^n)dx$

$\varphi x = 1 - x$; also $d\varphi x = - dx$.

Mithin $\frac{dfx}{d\varphi x} = \frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$

welches für $x = a = 1$ sich in $\frac{1 - (n+1)}{-1} = n$

ver=

verwandelt. Dies ist demnach der Werth des Quotienten $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ für $x = 1$.

Es erhellet dies auch durch folgende Betrachtung. Es ist

$\frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}$ (oder wenn man $1 - x^n$ mit $1 - x$ dividirt) $= x(1 + x + x^2 \ldots + x^{n-1})$. Aber für $x = 1$ wird die in der Parenthese eingeschlossene Reihe offenbar $= 1 + n - 1 = n$; weil jede Potenz von x sich in 1 verwandelt und $n - 1$ solcher Potenzen vorhanden sind. Also ist

$$\frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = n \text{ für } x = 1.$$

Beysp. III. Es sey der Werth des Bruchs $\frac{1 - 2x + 2x^3 - x^4}{(1 - x)^3}$ für $x = 1$ zu bestimmen.

Hier ist also $fx = 1 - 2x + 2x^3 - x^4$

$$\varphi x = (1 - x)^3.$$

Demnach $\frac{dfx}{d\varphi x} = \frac{-2 + 6x^2 - 4x^3}{-3(1 - x)^2}$; da dieser Ausdruck für $x = 1$ noch unbestimmt bleibt, weil Zähler und Nenner zugleich verschwinden; so muß man jetzt nach (§. 79.) im Zähler und Nenner abermahls differenziiren, dann wird

$$\frac{d^2 f x}{d^2 \varphi x} = \frac{12x - 12x^2}{6(1-x)}$$

Dieser Ausdruck wird im Zähler und Nenner noch immer $= 0$ für $x = 1$; folglich muß man abermahls differenziiren und man erhält

$$\frac{d^3 f x}{d^3 \varphi x} = -\frac{12 - 24x}{6}$$

Da dieses für $x = 1$ sich in $+ 2$ verwandelt, so ist der Werth des Bruchs $\frac{f x}{\varphi x}$ oder

$$\frac{1 - 2x + 2x^3 - x^4}{(1-x)^3} = + 2 \text{ für } x = 1.$$

Beysp. IV. Es sey der Bruch $\frac{\log x}{\sqrt{(1-x)}}$ für $x = 1$ zu bestimmen. Man hat also jetzt

$$\frac{d f x}{d \varphi x} = \frac{d \log x}{d \sqrt{(1-x)}}$$

aber $d \log x = \frac{dx}{x}$ (§. 21.) und $d\sqrt{(1-x)}$

$= -\frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}}$; also

$$\frac{d f x}{d \varphi x} = -\frac{2\sqrt{(1-x)}}{x}$$

Da dies für $x = 1$ den Werth 0 hat, so ist auch

$$\frac{\log x}{\sqrt{(1-x)}} = 0 \text{ für } x = 1.$$

Bey-

Beysp. V. Man sucht den Werth des Ausdrucks $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ für $x = 90°$, für welchen Fall wegen $\sin x = 1$ und $\cos x = 0$ Zähler und Nenner zugleich $= 0$ werden. Man hat also

$$\frac{dfx}{d\varphi x} = \frac{d(1 - \sin x + \cos x)}{d(\sin x + \cos x - 1)}$$

$$= \frac{-\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} \text{ (§. 39. 40.)}$$

Da der Werth dieses Bruchs für $x = 90°$ sich in $\frac{-1}{-1} = +1$ verwandelt, so ist $+1$ der Werth des vorgegebenen Ausdrucks.

Beyspiel VI. Den Werth des Ausdrucks $\frac{(1+x)\log x}{(1-x)^2}$ für $x = 1$ zu finden.

Also ist

$$dfx = d(1+x)\log x = dx\log x + \frac{(1+x)dx}{x}$$

$$d\varphi x = -2(1-x)dx$$

Mithin

$$\frac{dfx}{d\varphi x} = \frac{x\log x + 1 + x}{-2x(1-x)}$$

Da dies für $x = 1$ sich in $\frac{2}{2.0}$ oder in $\frac{1}{0}$ ver-

wandelt, und $\frac{1}{0}$ eine unendliche Größe bezeichnet, so ist der Werth des vorgegebenen Ausdrucks $= \infty$ für $x = 1$; ein Beyspiel, daß Brüche, deren Zähler und Nenner verschwinden (wie der vorgegebene $\frac{(1+x)\log x}{(1-x)^2}$ für $x = 1$) auch einen unendlichen Werth haben können.

§. 81.

Zusatz.

Das bisherige Verfahren kann auch in vielen Fällen dienen, den Unterschied zweyer unendlich werdenden Größen zu bestimmen, wenn die Formen, unter denen sie unendlich werden, gegeben sind. Daß dieser Unterschied sehr oft einer endlichen Größe gleich seyn kann, wird daraus erhellen, daß jede endliche Größe, in Vergleichung einer unendlichen, als verschwindend betrachtet werden kann.

Man betrachte sogleich das Beyspiel I im vorhergehenden §. Der Ausdruck $\frac{b-\sqrt{(b^2-x^2)}}{x^2}$ zerfällt in die beyden Theile $\frac{b}{x^2}$; und $\frac{\sqrt{(b^2-x^2)}}{x^2}$ Ihre Differenz ist der vorgegebene Ausdruck selbst.

Aber

Aber jeder von diesen beyden Theilen wächst unendlich, wenn x unendlich abnimmt, und für $x = 0$ wird $\frac{b}{x^2} = \infty$ und $\frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2} = \infty$.

Aber beyde Unendliche unter den Formen $\frac{b}{x^2}$ und $\frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$, wie sie hier vorgegeben sind, haben den endlichen Unterschied $\frac{1}{2b}$, weil

$\frac{b}{x^2} - \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$, oder $\frac{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$

wie wir oben gefunden haben $= \frac{1}{2b}$ ist, für $x = 0$, also für den Werth, für welchen jene Formen $\frac{b}{x^2}$ und $\frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$ sich ins Unendliche verwandeln.

II. Um es durch ein anderes Beyspiel zu erläutern, so seyen die Größen $\frac{x}{x-1}$ und $\frac{1}{\log x}$ vorgegeben. Beyde werden für $x = 1$ unendlich. Man verlangt ihren Unterschied für den Fall, daß sie unendlich werden.

Der Unterschied ist

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} = \frac{x \log x - (x-1)}{(x-1)\log x}$$

Man suche also den Werth dieses Ausdrucks für $x = 1$. Da nun aber Zähler und Nenner für diesen Werth von x verschwinden, so erhält man nach dem Verfahren des vorigen §es

$$\frac{dfx}{d\varphi x} = \frac{d[x \log x - (x-1)]}{d[(x-1)\log x]}$$

Aber $d[x \log x - (x-1)] = \frac{x\,dx}{x} + dx \log x$

$$- dx = dx \log x.$$

Und $d(x-1)\log x = \frac{(x-1)dx}{x} + dx \log x$

Demnach

$$\frac{dfx}{d\varphi x} = \frac{x \log x}{x - 1 + x \log x}$$

Da dies für $x = 1$ abermahls $\frac{0}{0}$ giebt, so muß man im Zähler und Nenner nochmahls differenziiren und man erhält nach gehöriger Rechnung

$$\frac{d^2 fx}{d^2 \varphi x} = \frac{1}{1 + 1 + \log x}$$

Da

Da dies für $x = 1$ den Bruch $\frac{1}{2}$ giebt, so erhellet, daß wenn die beyden Größen $\frac{x}{x-1}$ und $\frac{1}{\log x}$ für $x = 1$ unendlich werden, sie in diesem Zustande noch um die endliche Differenz $\frac{1}{2}$ von einander unterschieden sind.

§. 82.

Aufgabe.

Es seyen M, N ganze rationale Funktionen von x und die Bruchfunktion $\frac{M}{N}$ vorgegeben, in welcher die höchste Potenz von x im Zähler M niedriger sey, als im Nenner N. Der Nenner enthalte den Factor $\alpha + \beta x$ aber nur einmahl, man soll den Zähler A des aus diesem Factor entstehenden einfachen Bruchs $\frac{A}{\alpha + \beta x}$ bestimmen.

Aufl. I. Da unter der Voraussetzung, daß M von einer niedrigern Dimension als N ist, aus

dem Factor $\alpha + \beta x$ des Nenners N ein Bruch entsteht, dessen Zähler A kein x enthält (§. X. Einleitung), so sey nunmehr $N = (\alpha + \beta x) S$, so daß S das Produkt der übrigen Factoren des Nenners N bedeutet, so wird sich die Bruchfunktion $\frac{M}{N}$ in die beyden Brüche $\frac{A}{\alpha + \beta x} + \frac{P}{S}$ zerlegen, wo P ebenfalls eine ganze rationale Funktion von x seyn wird, und zwar von einer niedrigern Dimension als S.

II. Da also $\frac{M}{N} = \frac{A}{\alpha + \beta x} + \frac{P}{S}$, so hat man, wenn die beyden Brüche rechter Hand des = Zeichens unter einerley Benennung gebracht werden

$$M = A \cdot S + P(\alpha + \beta x).$$

Also $P = \frac{M - AS}{\alpha + \beta x}$

III. Da nun P eine ganze rationale Funktion von x ist, so muß sich nothwendig $M - AS$ mit $\alpha + \beta x$ ohne Rest dividiren lassen, d. h. $\alpha + \beta x$ muß ein Factor von $M - AS$ seyn. Folglich muß $M - AS = 0$ werden, wenn man diesen Factor

= 0

$= 0$ setzt, d. h. wenn in den Ausdruck $M - AS$ $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ gesetzt wird.

IV. Man hat demnach aus der Gleichung $M - AS = 0$, den Werth von $A = \frac{M}{S}$, wenn in die Funktionen M und S der Werth von $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ gesetzt wird. Und so ist denn auf diese Art, der Zähler A des einfachen Bruchs $\frac{A}{\alpha + \beta x}$ gefunden.

V. Dieses Verfahren kann gebraucht werden, wenn man S weiß. Da aber dieser Factor des Nenners N erst durch die Division $\frac{N}{\alpha + \beta x}$ gefunden werden muß, wenn nicht etwa die Factoren von S auch schon gegeben sind, so kann man, um die Lästigkeit jener Division zu ersparen, den Werth von A auch auf folgende Art finden.

VI. Wegen $S = \frac{N}{\alpha + \beta x}$ ist auch $A = \frac{(\alpha + \beta x)M}{N}$ (IV) wenn überall $-\frac{\alpha}{\beta}$ statt x gesetzt wird. Aber für diesen Werth von x verwandelt

delt sich $\frac{(\alpha+\beta x)M}{N}$ in $\frac{0}{0}$, weil auch N den Factor $\alpha+\beta x$ enthält, welcher für $x=-\frac{\alpha}{\beta}$ verschwindet.

Mithin erhält man nach (§. 79.)

$$A=\frac{d(\alpha+\beta x)M}{dN}=\frac{(\alpha+\beta x)\frac{dM}{dx}+M\beta}{\frac{dN}{dx}},$$

in welchem Ausdrucke $(\alpha+\beta x)\frac{dM}{dx}$ für $x=-\frac{\alpha}{\beta}$ verschwindet.

Also ist schlechtweg $A=\frac{M\beta}{\frac{dN}{dx}}=\frac{M\beta dx}{dN}$, wenn man in diesen Quotienten, nachdem man dN durch die Differenziation gefunden hat, überall $-\frac{\alpha}{\beta}$ statt x setzt.

VII. Beyspiel I. Es sey

$$\frac{M}{N}=\frac{a+bx}{(\alpha+x)(\gamma+x)(\varepsilon+x)}$$

so entsteht aus dem Factor $\alpha+x$ des Nenners ein Bruch, dessen Zähler $A=\frac{M}{S}=\frac{a+bx}{(\gamma+x)(\varepsilon+x)}$ wird,

wird, wo statt x überall $-\alpha$ gesetzt werden muß, weil für den Factor $\alpha + x$, $\beta = 1$ ist. Dies giebt

$$A = \frac{a - b\alpha}{(\gamma - \alpha)(\varepsilon - \alpha)}.$$

So wird aus dem Factor $\gamma + x$ des Nenners N ein Bruch, dessen Zähler

$$B = \frac{a - b\gamma}{(\alpha - \gamma)(\varepsilon - \gamma)}; \text{ u. s. w. } C = \frac{a - b\varepsilon}{(\alpha - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)}.$$

Daher die Bruchfunktion $\frac{a + bx}{(\alpha + x)(\gamma + x)(\varepsilon + x)}$ sich in die drey einfachen Brüche

$$\frac{A}{\alpha + x} + \frac{B}{\gamma + x} + \frac{C}{\varepsilon + x}$$

zerlegt, statt A, B, C die gefundenen Werthe substituirt.

VIII. Beyspiel II. Es sey

$$\frac{M}{N} = \frac{1 + x^2}{1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 4x^4}$$

Daß hier der Nenner den Factor $1 - x$ hat, erkennt man daran, daß für $x = 1$ der Nenner $1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 4x^4 = 0$ wird, oder $x = 1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist.

Ohne nun hier den Quotienten $S = \frac{N}{1 - x} = \frac{1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 4x^4}{1 - x}$ durch die Division

zu

zu entwickeln, kann man den Werth von A nach der Formel (VI) $A = \frac{M\beta dx}{dN}$ finden, in welcher für den Factor $\alpha + \beta x = 1 - x$; $\alpha = 1$; $\beta = -1$ ist, wodurch schlechtweg $A = -\frac{Mdx}{dN}$ wird. Nun ist aber $dN = (2 - 6x + 12x^2 - 16x^3)dx$; also wegen $M = 1 + x^2$

$$A = -\frac{1 + x^2}{2 - 6x + 12x^2 - 16x^3}$$

wo überall $-\frac{\alpha}{\beta}$ oder hier $+1$ statt x gesetzt werden muß, wodurch $A = \frac{-2}{-8} = +\frac{1}{4}$ erhalten wird.

§. 83.

Aufgabe.

Wenn in der vorigen Aufgabe der Nenner N den Factor $\alpha + \beta x$ mehrere mahle, also eine Potenz desselben, z. B. die vierte, enthält, so daß $N = (\alpha + \beta x)^4 . S$ ist, S aber den Factor $\alpha + \beta x$ nicht enthält, die Zähler der aus dem Factor $(\alpha + \beta x)^4$ entstehenden Brüche zu finden.

Aufl.

Aufl. I. Nach (Einleitung §. XIV.) entstehen aus $(\alpha+\beta x)^4$ und dem Factor S die Brüche

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{(\alpha+\beta x)^4}+\frac{B}{(\alpha+\beta x)^3}+\frac{C}{(\alpha+\beta x)^2}+\frac{D}{\alpha+\beta x}+\frac{P}{S}.$$

II. Dies giebt, alle unter einerley Nenner gebracht, den Zähler $M=AS+BS(\alpha+\beta x)+CS(\alpha+\beta x)^2+DS(\alpha+\beta x)^3+P(\alpha+\beta x)^4$.

Woraus

$$P=\frac{M-AS-BS(\alpha+\beta x)-DS(\alpha+\beta x)^2-DS(\alpha+\beta x)^3}{(\alpha+\beta x)^4}$$

folgt.

III. Da nun P eine ganze Funktion ist, so muß sich der Zähler von P mit $(\alpha+\beta x)^4$ ohne Rest dividiren lassen, oder $(\alpha+\beta x)^4$ muß ein Factor von $M-AS-BS(\alpha+\beta x)-CS(\alpha+\beta x)^2-DS(\alpha+\beta x)^3$, oder auch von $S\left(\frac{M}{S}-A-B(\alpha+\beta x)-C(\alpha+\beta x)^2-D(\alpha+\beta x)^3\right)$ seyn.

IV. Da nun aber, vermöge der Voraussetzung, S den Factor $\alpha+\beta x$ nicht enthalten soll, so wird bloß

bloß die Funktion $\frac{M}{S} - A - B(\alpha + \beta x) - C(\alpha + \beta x)^2 - D(\alpha + \beta x)^3$, welche ich mit Z bezeichnen will, sich mit $(\alpha + \beta x)^4$ müssen dividiren lassen, oder Z wird den Factor $\alpha + \beta x$ viermahl enthalten müssen.

V. Daraus folgt denn (§. 49. V.), daß auch die Differenzialquotienten oder Funktionen $\frac{dZ}{dx}$; $\frac{d^2Z}{dx^2}$; $\frac{d^3Z}{dx^3}$; noch diesen Factor $\alpha + \beta x$ enthalten werden.

VI. Setzt man also diesen Factor $= 0$, mithin $x = -\frac{\alpha}{\beta}$, so wird für diesen Werth von x nicht allein die Funktion Z, sondern auch $\frac{dZ}{dx}$; $\frac{d^2Z}{dx^2}$; $\frac{d^3Z}{dx^3}$ verschwinden.

VII. Wird nun der Kürze halber $\frac{M}{S} = W$ gesetzt, so hat man für $x = -\frac{\alpha}{\beta}$

1) Z d. h. $W - A - B(\alpha + \beta x) - C(\alpha + \beta x)^2 - D(\alpha + \beta x)^3 = 0$

dZ

2) $\frac{dZ}{dx}$ d. h. $\frac{dW}{dx} - B\beta - 2C(\alpha + \beta x)\beta$
$- 3D(\alpha + \beta x)^2 \beta = 0$

3) $\frac{d^2Z}{dx^2}$ d. h. $\frac{d^2W}{dx^2} - 2C\beta^2 - 3.2(\alpha + \beta x) D\beta^2 = 0$

4) $\frac{d^3Z}{dx^3}$ d. h. $\frac{d^3W}{dx^3} - 3.2.1 D\beta^3 = 0.$

Oder wenn man wirklich $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ setzt, schlechtweg

1) $W - A = 0$ oder $A = W$

2) $\frac{dW}{dx} - B\beta = 0$; oder $B = \frac{1}{\beta}\frac{dW}{dx}$

3) $\frac{d^2W}{dx^2} - 2.1 C\beta^2 = 0$; oder $C = \frac{1}{1.2\beta^2}\frac{d^2W}{dx^2}$

4) $\frac{d^3W}{dx^3} - 3.2.1 D\beta^3 = 0$; od. $D = \frac{1}{1.2.3\beta^3}\frac{d^3W}{dx^3}$

wovon das Gesetz des Fortgangs klar vor Augen liegt, dergestalt, daß wenn der Nenner N auch den Factor $\alpha + \beta x$ mehr als 4 mahl enthielte, z. B. n mahl, sich nach eben diesen Formeln die Zähler der aus $(\alpha + \beta x)^n$ entstehenden Brüche

$$\frac{A}{(\alpha+\beta x)^n} + \frac{B}{(\alpha+\beta x)^{n-1}} + \frac{C}{(\alpha+\beta x)^{n-2}} \dots + \frac{H}{\alpha+\beta x}$$

würden berechnen lassen, wo denn, wenn $\frac{H}{\alpha+\beta x}$ der letzte Bruch ist, der Zähler

$$H = \frac{1}{1.2.3..(n-1)\beta^{n-1}} \frac{d^{n-1} W}{d x^{n-1}}$$

(in diesen Differenzialquotienten, so wie in alle vorhergehenden $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ gesetzt) seyn würde.

VIII. Beyspiel. Es sey

$$\frac{M}{N} = \frac{a+x}{(\alpha+x)^5 (\gamma+x)}$$

wo also der Nenner N den Factor $\alpha + x$ fünfmahl enthielte. Hier wäre also $n = 5$; $M = a + x$; $S = \gamma + x$; der Factor $\alpha + \beta x$ hier $\alpha + x$, also $\beta = 1$; und $-\frac{\alpha}{\beta} = -\alpha$, und W oder $\frac{M}{S} = \frac{a+x}{\gamma+x}$.

Wegen $n = 5$ muß man also hier die Differenzialquotienten von W, bis auf den 4ten suchen.

Dies giebt

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\gamma - a}{(\gamma+x)^2}; \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = -\frac{2(\gamma-a)}{(\gamma+x)^3}$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \frac{2.3(\gamma-a)}{(\gamma+x)^4}; \quad \frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{1.2.3.4(\gamma-a)}{(\gamma+x)^5}$$

Setzt man jetzt in alle diese Ausdrücke $-\frac{\alpha}{\beta}$ oder hier $-\alpha$ statt x, so erhält man aus (VII) die

die Werthe der Zähler A, B, C, D, E auf folgende Art

$$A = \frac{a - \alpha}{\gamma - \alpha};\ B = \frac{\gamma - a}{(\gamma - \alpha)^2};\ C = -\frac{\gamma - a}{(\gamma - \alpha)^3}$$

$$D = \frac{\gamma - a}{(\gamma - \alpha)^4};\ E = -\frac{\gamma - a}{(\gamma - \alpha)^5}$$

Wollte man nun hier auch noch den Zähler P des aus dem Factor $\gamma + x$ des Nenners N entstehenden Bruchs berechnen, so setze man in (§. 82.) das dortige M hier $= a + x$, das dortige S hier $= (\alpha + x)^5$, das dortige $\alpha + \beta x$ hier $= \gamma + x$, also das dortige α hier $= \gamma$, das dortige β hier $= 1$; mithin das dortige $-\frac{\alpha}{\beta}$ hier $= -\gamma$, so wird der erwähnte Zähler $P = \frac{M}{S}$ hier $= \frac{a + x}{(\alpha + x)^5}$ oder überall $-\gamma$ statt x gesetzt $= \frac{a - \gamma}{(\alpha - \gamma)^5}$.

Demnach würde die Bruchfunktion $\frac{M}{N}$ oder $\frac{a + x}{(\alpha + x)^5\,(\gamma + x)}$ in folgende Brüche zerfallen

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{(\alpha + x)^5} + \frac{B}{(\alpha + x)^4} + \frac{C}{(\alpha + x)^3} + \frac{D}{(\alpha + x)^2} + \frac{E}{\alpha + x} + \frac{P}{\gamma + x}$$

statt A, B, C, D, E, P überall die gefundenen Werthe substituirt.

§. 84.

Anmerkung.

1. Die bisherigen Vorschriften sind allgemein und gelten, wenn in dem Nenner N der vorgegebenen Bruchfunktion $\frac{M}{N}$ auch imaginäre einfache Factoren von der Form $x - a(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1})$; $x - a(\cos\varphi - \sin\varphi \sqrt{-1})$, welche in einander multiplicirt den quadratischen möglichen Factor $x^2 - 2a\cos\varphi . x + a^2$ geben würden, vorkommen. Man vergleiche hiemit (§. XV. ꝛc. der Einleitung.) Denn setzt man

$$\frac{A}{x-a(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})}, \frac{B}{x-a(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1})}$$

seyen die aus diesen Factoren entstehenden einfachen Brüche, so ist für den ersteren das α in (§. 82.) hier $= -(a\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$; und das β hier $= 1$, mithin $-\frac{\alpha}{\beta}$ hier $= a(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$; oder diesen Werth muß man in den Ausdruck $\frac{M\beta dx}{dN}$ d. h. wegen $\beta = 1$ hier in den Quotienten $M : \frac{dN}{dx}$ statt x setzen, um A zu bekommen. Ich will der Kürze halber $\frac{dN}{dx} = L$ nennen, so ist $A = \frac{M}{L}$

statt

statt x überall den Werth $a(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ gesetzt.

2. Weil nun M L ganze rationale Funktionen von x sind, so setze man in M oder L heiße ein unbestimmtes Glied x^{μ}, so verwandelt sich dieses durch die erwähnte Substitution in $a^{\mu}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\mu}$ oder in $a^{\mu}(\cos\mu\varphi + \sin\mu\varphi.\sqrt{-1})$ (§. 48. VIII) d. h. in einen möglichen Theil $a^{\mu}\cos\mu\varphi$ und einen unmöglichen $a^{\mu}\sin\mu\varphi.\sqrt{-1}$.

Also zerfallen M und L, aus so viel Potenzen von x sie auch bestehen, in einen möglichen und unmöglichen Theil. Die möglichen von M und L sollen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, und die unmöglichen $m\sqrt{-1}$; $l\sqrt{-1}$ heißen, so ist $A = \frac{\mathfrak{M} + m\sqrt{-1}}{\mathfrak{L} + l\sqrt{-1}}$; und so wird auf eine völlig ähnliche Art $B = \frac{\mathfrak{M} - m\sqrt{-1}}{\mathfrak{L} - l\sqrt{-1}}$, weil sich der Nenner des zweyten Bruchs in (1) von dem des erstern nur darin unterscheidet, daß in ihm das $\sqrt{-1}$ negativ ist.

3. Wenn man die beyden Brüche in (1) zusammen addirt, so erhält man den Bruch

$$\frac{(A+B)x - (A+B)a\cos\varphi + (A-B)a\sin\varphi\sqrt{-1}}{x^2 - 2a\cos\varphi . x + a^2}$$

 also

also einen Bruch, dessen Nenner der quadratische oder Trinomialfactor ist, welcher aus den beyden einfachen unmöglichen Factoren (1) entsteht.

4. Nun ist A + B (2) nach gehöriger Rechnung $= \frac{2(\mathfrak{M}\mathfrak{L} + m\,l)}{\mathfrak{L}^2 + l^2}$ und

$$(A - B)\,a \sin\varphi \sqrt{-1} = -\frac{2(\mathfrak{L}m - \mathfrak{M}l)\,a \sin\varphi}{\mathfrak{L}^2 + l^2}$$

Und der Bruch (3) verwandelt sich in

$$\frac{\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}}{x^2 - 2a\cos\varphi . x + a^2} \text{ wo } \mathfrak{A} = \frac{2(\mathfrak{M}\mathfrak{L} + m\,l)}{\mathfrak{L}^2 + l^2} \text{ und}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{[(\mathfrak{M}\mathfrak{L} + m\,l)\cos\varphi + (\mathfrak{L}m - \mathfrak{M}l)\sin\varphi]}{\mathfrak{L}^2 + l^2} . 2a$$

ist.

5. So können auf eine ähnliche Art, wenn der Nenner N noch andere quadratische Factoren, z. B. $x^2 - 2b\cos\psi . x + b^2$, welche in einfache von der Form (1) zerfielen, (wo nur b, ψ, statt a, φ zu setzen wäre) enthielte, die zugehörigen Brüche wie (1) oder (4) gefunden werden. Die vollständige Ausführung hievon findet man in Eulers Differenzialrechnung P. II. Cap. XVIII. Das bisher beygebrachte ist für den meisten Gebrauch vollkommen hinlänglich.

Vom Größten oder Kleinsten.

§. 85.

Erklärung. 1. Wenn y eine Funktion von x ist, so kann y für ein gewisses x einen Werth bekommen, welcher größer ist, als diejenigen, welche einem etwas größern oder kleinern x entsprechen würden. Es kommt dies auf die Beschaffenheit der Funktion an. Gesetzt sie sey $y = \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{(\alpha x - x^2)}$, welches die bekannte Gleichung für die Ellipse ist, wenn die Abscissen vom Anfangspunkte der großen Axe α genommen werden. Hier wächst die Ordinate y von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}\alpha$, für welchen Werth von x das $y = \frac{1}{2}\gamma$, oder der halben kleinen Axe gleich wird. Läßt man nun x noch weiter wachsen, so nimmt y wieder ab, und für $x = \alpha$ ist y wieder $= 0$, wie für $x = 0$. Würde man x auch um die mindeste Differenz $= \Delta x$ größer oder kleiner, als $x = \frac{1}{2}\alpha$ nehmen, so wird y kleiner, als es für $x = \frac{1}{2}\alpha$ war, d. h. $< \frac{1}{2}\gamma$. Man kann also sagen, daß die Ordinate y für $x = \frac{1}{2}\alpha$ einen größten Werth habe, oder daß y für $x = \frac{1}{2}\alpha$ ein Größtes (maximum) sey.

2. Wäre die Funktion $6 + 2x - x^2$ vorgegeben, welche ich der Kürze halber mit mit y bezeich-

zeichnen will, wo man y nnd x auch wieder als Coordinaten einer krummen Linie betrachten kann, und setzt man $x = 1$, so wird für diesen Werth von x, $y = 7$. Nimmt man x auch nur um die mindeste Differenz Δx, z. B. nur um $\Delta x = 0{,}001$ größer oder kleiner als 1, so wird $y < 7$.

Ist z. B. $x = 1{,}001$, so wird $y = 6 + 2{,}002 - 1{,}002001 = 6{,}999999$ also < 7.

Ist $x = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$, so wird $y = 6 + 1{,}998 - 0{,}998001 = 6{,}999999$, also wieder < 7. Daher ist der Werth $y = 7$ für $x = 1$ ein Größtes, oder ein Maximum der Funktion $y = 6 + 2x - x^2$.

3. Nimmt man in (1) das Wurzelzeichen negativ, so ist für $x = \frac{1}{2}\alpha$, y zwar auch eine größte Ordinate, aber eine größte verneinte $= -\frac{1}{2}\gamma$. Ist nemlich $x >< \frac{1}{2}\alpha$, so ist y für beyde Werthe eine kleinere verneinte Größe.

4. Umgekehrt heißt y ein Kleinstes (Minimum) für einen gewissen Werth von x, wenn für ein größeres oder kleineres x, ein größeres y herauskommt.

Es sey z. B. $y = x^3 - 3x + 6$, so ist für $x = +1$, der Werth von $y = +4$; ein Kleinstes.

stes. Jeder andere Werth von x, der etwas größer oder kleiner als $+1$ ist, wird ein größeres y geben, als $+4$ ist.

5. Aber die Funktion (4) hat auch einen größten Werth; nämlich für $x = -1$ wird $y = 8$ ein Größtes; weil, wenn man x etwas größer oder kleiner negativ nimmt, in beyden Fällen $y < +8$ werden wird.

Es erhellet aus diesem Beyspiele, daß eine und dieselbe Funktion größte und kleinste Werthe haben kann. Ja sie kann mehrere größte und kleinste haben, welches denn auf ihre Beschaffenheit ankömmt.

6. Man gedenke sich eine Gleichung zwischen y und x; x als Abscisse einer krummen Linie und y als Ordinate, und setze, die krumme Linie, welche nach dieser Gleichung construirt worden, habe die Gestalt (Fig. III.); so gehöret zur Abscisse AP, eine kleinste positive Ordinate PM; denn die benachbarten Ordinaten, wie pm, p'm', sind größer als PM, Hingegen gehöret zur Abscisse AQ eine größte positive Ordinate QN, weil die benachbarten qn, q'n' < QN. Zur Abscisse AR gehöret eine größte negative Ordinate RS, denn die benachbarten rs, r's' sind kleinere negative als RS. Endlich ist TW eine kleinste negative, XY wieder eine

größte negative Ordinate, und nun über Y rechter Hand, so wie über M linker Hand, geht die krumme Linie mit unendlichen Schenkeln fort, worin weder größte noch kleinste Ordinaten mehr statt finden, weil keine Ordinaten sich mehr vorfinden, welche zwischen zwey kleineren oder größeren benachbarten enthalten sind.

Das bisherige wird den Begriff von den größten oder kleinsten Werthen einer Funktion so erläutern, daß daraus zugleich die Methode, diese Werthe selbst zu finden, ersichtlich wird. Indessen muß ich vorher noch folgende Bemerkung beyfügen.

7. Es ist bekannt, daß in der Analysis ein Größeres negative in Vergleichung des Positiven, für kleiner gehalten wird, als ein kleineres Negative; z. B. -8 für kleiner als -6, in so fern zu dem größern negativen -8 erst etwas Bejahtes $(+2)$ hinzu addirt werden muß, um das kleinere Negative -6 zu erhalten. In dieser arithmetischen Bedeutung kann eine größte negative Ordinate, wie RS, auch als ein Kleinstes betrachtet werden, weil die benachbarten rs, r's' kleinere Negative, also in der angeführten Bedeutung $> RS$ sind.

8. In eben dem Sinne (7) wird denn auch eine kleinste negative Ordinate wie TW, d. h. eine sol-

solche, welche größere verneinte Nachbarn hat, als ein Größtes betrachtet werden können.

9. Ich werde in der Folge, wenn ich nicht das Gegentheil erinnere, die Bedeutung des Größten und Kleinsten bey negativen Werthen einer Funktion y, immer nach (7) nehmen, weil alsdann y, wenn es negativ ist, eben so gut, als wenn es positiv ist, immer ein Größtes oder Kleinstes wird, je nachdem die benachbarten Werthe y′, y″ so beschaffen sind, daß, arithmetisch genommen, die Unterschiede y — y′; y — y″, beyde zugleich, entweder positiv oder negativ sind, also y größer ist, als die benachbarten Werthe y′, y″, oder kleiner als y′, y″.

§. 86.

Aufgabe.

In der Bedeutung (§. 85. 7—9.) die größten oder kleinsten Werthe einer Funktion y von x, zu bestimmen.

Aufl. I. Man gedenke sich, y sey ein Größtes oder Kleinstes für einen gewissen Werth von x, so müssen die Unterschiede y — y′; y — y″ beyde zugleich etwas bejahtes geben, wenn y ein Größtes ist; hingegen beyde zugleich etwas verneintes, wenn y ein Kleinstes ist. (§. 85. 9.)

II. Es kommt also darauf an, die benachbarten Werthe von y zu bestimmen, d. h. diejenigen, welche einem etwas größern oder kleinern Werthe von x zugehören, also zu einem Werthe $= x + c$, oder $x - c$, wo c jede beliebige Differenz bezeichnen kann, um welche man x etwas größer oder kleiner nimmt.

III. Nun ist aber nach dem Taylorischen Lehrsatze: wenn $x + c$ statt x gesetzt wird, wodurch y sich in y'' verwandelt

$$y'' = y + \frac{c\,dy}{dx} + \frac{c^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{c^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} \text{ ꝛc.}$$

und wenn $x - c$ statt x gesetzt wird, wodurch y sich in y' verwandelt

$$y' = y - \frac{c\,dy}{dx} + \frac{c^2\,d^2y}{1.2\,dx^2} - \frac{c^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} \text{ ꝛc.}$$

IV. Ich will der Kürze halber die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx}$ ꝛc. mit p, q, r, s.. bezeichnen, so erhält man

$$y - y' = cp - \frac{c^2q}{2} + \frac{c^3r}{6} - \frac{c^4s}{24} \text{ ꝛc.}$$

$$y - y'' = -cp - \frac{c^2q}{2} - \frac{c^3r}{6} - \frac{c^4s}{24} \text{ ꝛc.}$$

V. Sind nun die Quotienten p, q, r ꝛc. alle endlich, so kann man sich c so klein gedenken, daß

alle Glieder, worin die Potenzen von c vorkommen, gegen das erste c p verschwinden. Dies würde dann schlechtweg

$$y - y' = + cp$$

$$y - y'' = - cp$$

geben.

VI. Da diese Unterschiede entweder beyde zugleich positiv, oder beyde zugleich negativ seyn müssen, je nachdem y ein Größtes oder Kleinstes ist (§. 85. 9.), hier aber die beyden Unterschiede y - y' und y - y'' entgegengesetzte Werthe haben, so ist klar, daß es weder ein Größtes noch ein Kleinstes y geben kann, wofern nicht p oder $\frac{dy}{dx} = 0$ ist. Diese Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ muß also nothwendig statt finden, wenn es größte oder kleinste y soll geben können.

VII. Ist aber $\frac{dy}{dx}$ oder p = 0, so ist dies eine Gleichung, aus der sich die Werthe von x bestimmen, zu denen größte oder kleinste y gehören können.

VIII. Denn ist p = 0, so hat man jetzt (aus IV)

$$y - y' = -\frac{c^2 q}{2} + \frac{c^3 r}{6} - \frac{c^4 s}{24} \text{ etc.}$$

$$y - y'' = -\frac{c^2 q}{2} - \frac{c^3 r}{6} - \frac{c^4 s}{24} \text{ etc.}$$

Mithin, wenn man c wieder so klein sich gedenkt, daß alle folgenden Glieder gegen das erste verschwinden, schlechtweg

$$y - y' = -\frac{c^2 q}{2}$$

$$y - y'' = -\frac{c^2 q}{2}$$

Ist also q oder $\frac{d^2 y}{dx^2}$ positiv, so sind beyde Werthe von $y - y'$, $y - y''$ negativ, mithin y ein Kleinstes (I). Ist aber q oder $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ, so sind die Unterschiede $y - y'$; $y - y''$ beyde zugleich positiv, mithin y ein Größtes.

IX. Um also zu untersuchen, ob ein gewisses x, welches aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ (VII) abgeleitet und in die Funktion y substituirt wird, dies y zu einem Kleinsten oder Größten macht, so muß man nachsehen, ob eben dieses x den Werth von q oder

d²y

$\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv oder negativ macht. Wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, so ist y ein Kleinstes, wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, so ist y ein Größtes.

X. Aber es könnte auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ werden. Wäre dies der Fall, so hätte man

$$y - y' = + \frac{c^3 r}{6} - \frac{c^4 s}{24} \text{ etc.}$$

$$y - y'' = - \frac{c^3 r}{6} - \frac{c^4 s}{24} \text{ etc.}$$

Wäre nun wieder c so klein, daß alle folgenden Glieder gegen das erste verschwinden, so hätte man

$$y - y' = + \frac{c^3 r}{6}$$

$$y - y'' = - \frac{c^3 r}{6}$$

Wofern also nicht auch r oder $\frac{d^3y}{dx^3}$ für den Werth von x, welchen man aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ (IX) abgeleitet hat, verschwindet, so ist einer von den beyden Unterschieden $y - y'$; $y - y''$ positiv, der andere negativ, mithin das y wie in (VI) weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

XI.

XI. Fände sich aber auch r oder $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, so wäre jetzt

$$y - y' = - \frac{c^4 . s}{24} + \frac{c^5 . t}{120} \text{ rc.}$$

$$y - y'' = - \frac{c^4 s}{24} - \frac{c^5 t}{120} \text{ rc.}$$

folglich c wieder so klein genommen, daß die folgenden Glieder verschwinden

$$y - y' = - \frac{c^4 s}{24}$$

$$y - y'' = - \frac{c^4 s}{24}$$

Mithin wie in (VIII) y ein Kleinstes wenn s oder $\frac{d^4 y}{dx^4}$ positiv ist, und y ein Größtes, wenn $\frac{d^4 y}{dx^4}$ negativ ist.

XII. Ueberhaupt seyen $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ und $\frac{d^{2n+1} y}{dx^{2n+1}}$ zwey allgemeine nächstaufeinander folgende Glieder in (IV) und für einen gewissen Werth von x, den man aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ abgeleitet hat, seyen alle

vor

vor $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ befindlichen Differenzialquotienten $= 0$, so wird y ein Kleinstes, wenn $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ positiv, und ein Größtes, wenn $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ negativ wird.

Einige Beyspiele werden die Sache vollends klar machen.

§. 87.

Beyspiel I. Es sey $y = x^3 - 3x + 6$ wie oben (§. 85. 4.) man sucht die Werthe von x, für welche y, d. h. $x^3 - 3x + 6$ ein Größtes oder Kleinstes wird.

Man mache also

$\frac{dy}{dx}$, d. h. $3x^2 - 3 = 0$; oder $x^2 - 1 = 0$;

so ist $x = \pm 1$. Es giebt also zwey Werthe von x für welche y ein Größtes oder Kleinstes wird.

Ob nun erstlich für $x = +1$ die Funktion y oder $x^3 - 3x + 6$ ein Größtes oder Kleinstes wird, entscheidet sich aus $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$. Da dies für $x = +1$ positiv ist, so wird der zu $x = +1$ ge-

hörige Werth von $y = 1 - 3 + 6 = + 4$ ein Kleinstes seyn; wie oben (§. 86. IX.) u. (§. 85. 4.)

Für $x = - 1$ wird $\frac{d^2 y}{dx^2}$, oder $6x$ negativ. Mithin ist der zu $x = - 1$ gehörige Werth von $y = - 1 + 3 + 6 = + 8$ ein Größtes, wie a. a. O.

Beyspiel II. Es sey die Funktion $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, so ist $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$.

Setzt man dies $= 0$, so werden aus der Gleichung $5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$, oder $x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0$, welche sich in $x^2 (x - 1)(x - 3) = 0$ zerlegt, die Werthe von $x = \pm 0$, sodann $x = + 1$, und $x = + 3$.

Für den Werth $x = 0$ wird erstlich auch $\frac{d^2 y}{dx^2}$ oder $20x^3 - 60x^2 + 30x = 0$; aber nicht der Werth von $\frac{d^3 y}{dx^3} = 60x^2 - 120x + 30$; daher giebt $x = 0$ weder ein größtes noch kleinstes y (§. 86. X.)

Für den Werth $x = + 1$, wird $\frac{d^2 y}{dx^2} = 20 - 60 + 30 = - 10$ negativ; also ist für $x = + 1$

der

der Werth von y oder $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 = 1 - 5 + 5 + 1 = + 2$ ein Größtes.

Für den Werth $x = + 3$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 20.27 - 60.9 + 30.3 = + 90$ positiv, und daher der zu $x = + 3$ gehörige Werth von $y = + 243 - 405 + 135 + 1 = - 26$ ein Kleinstes in der arithmetischen Bedeutung (§. 85. 7.) nämlich ein größtes Verneinte wie daselbst R.S.

Beyspiel III. Es sey $y = \frac{x}{1 + x^2}$, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$; und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}$.

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = 0$; d. h. $\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ oder $1 - x^2 = 0$, so wird $x = \pm 1$.

Für $x = + 1$ wird aber $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 - 6}{8} = -\frac{1}{2}$ negativ. Demnach y oder der Bruch $\frac{x}{1 + x^2}$ für $x = + 1$ ein Größtes $= \frac{1}{1 + 1} = + \frac{1}{2}$.

Für $x = - 1$ wird hingegen $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2 + 6}{8} = + \frac{1}{2}$ positiv. Demnach y oder $\frac{x}{1 + x^2}$ für

$x = -1$ ein Kleinstes in der Bedeutung (§. 85. 7.) oder ein Größtes in der Bedeutung des R S daselbst, weil für $x = -1$; $y = -\frac{1}{2}$ also negativ ist.

Beyspiel IV. Zu untersuchen, unter welchen Umständen der Quotient $\frac{\log x}{x}$ einen größten oder kleinsten Werth erhält.

Man setze $\frac{\log x}{x} = y$; so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} - 2\frac{(1 - \log x)}{x^3}$.

Aber $\frac{dy}{dx}$ d. h. $\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2} = 0$ gesetzt, giebt $1 - \log x = 0$, d. h. $\log x = 1$.

Versteht man also natürliche Logarithmen, so ist $x = e$, wenn e die Zahl 2,71828 ... (§. 23.) ist, deren natürlicher Logarithme $= 1$.

Dies giebt denn für diesen Werth von x den Quotienten $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{e^3} - \frac{2(1 - \log e)}{e^3} = -\frac{1}{e^3}$ negativ. Demnach wird für $x = e$ die Funktion y oder $\frac{\log x}{x} = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$ ein Größtes. Es wird

also beständig, was man für x auch für eine Zahl setzen mag, der Quotient $\frac{\log x}{x} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2,71828\ldots}$ seyn.

Beyspiel V. Es seyen in einem Kreise (Fig. IV.) dessen Halbmesser BC = r; AB, AD zwey gleiche lange Sehnen, welche bey A einen Winkel = x einschließen. Man frägt, wie groß dieser Winkel seyn muß, daß die drey Sehnen AB, AD, BD zusammen die größte Summe ausmachen.

Man ziehe durch A, C eine gerade Linie ACF, so wird diese auf BD senkrecht seyn, und die Winkel BAD, BCD halbiren. Fällt man nun auch auf AB ein Perpendikel CE, so hat man $AB = 2AE = 2AC \cos \frac{1}{2} BAD = 2r \cos \frac{1}{2}x$, und $BD = 2BF = 2BC \sin BCF = 2r \sin x$.

Demnach

$$AB + AD + BD = 2AB + BD = 4r \cos \tfrac{1}{2}x + 2r \sin x.$$

Dieses soll also ein Größtes seyn.

Man setze demnach $y = 4r \cos \frac{1}{2}x + 2r \sin x$, so wird $\frac{dy}{dx} = -2r \sin \frac{1}{2}x + 2r \cos x$ (in §. 40. statt $\cos \varphi$ den $\cos \frac{1}{2}x$, und (§. 38.) statt $\sin \varphi$, $\sin x$ gesetzt. Ferner

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -r \cos \tfrac{1}{2}x - 2r \sin x.$$

Man erhält also $\frac{dy}{dx}$ oder $-2r\sin\frac{1}{2}x + 2r\cos x = 0$, gesetzt, $\sin\frac{1}{2}x = \cos x$, oder nach den bekannten trigonometrischen Formeln $\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)} = \cos x$, mithin wenn man auf beyden Seiten quadrirt, die quadratische Gleichung

$$\cos x^2 + \tfrac{1}{2}\cos x = \tfrac{1}{2};$$

woraus $\cos x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{2})}$
$= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$ wird.

Es sind also die beyden Werthe von $\cos x$ folgende

$$\cos x = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = +\tfrac{1}{2}$$
$$\cos x = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} = -1.$$

Der erstere Werth giebt $x = 60^\circ$, weil $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$. Für diesen ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -r\cos 30^\circ - 2r\sin 60^\circ$$
$$= -3r\cos 30^\circ.$$

Da dies negativ ist, so wird für $x = 60^\circ$ die Funktion y, d. h. die Summe der drey Sehnen $AB + AD + BD$ ein Größtes. Aber für $x = 60^\circ$ ist das Dreyeck BAD gleichseitig. Also wenn die drey Sehnen AB, AD, BD einander gleich sind, ist ihre Summe am Größten.

Der zweyte Werth von $\cos x$ war $= -1$. Dies giebt $x = 180^\circ$. Aber zu diesem Werthe von

x gehört weder ein Größtes noch Kleinstes. Denn für $x = 180^\circ$ wird $\frac{d^2 y}{dx^2} = - r \cos 90^\circ - 2 r \sin 180^\circ = 0$. Nun aber verschwindet nicht der Werth von $\frac{d^3 y}{dx^3}$, welcher $= \frac{1}{2} r \sin \frac{1}{2} x - 2 r \cos x = \frac{1}{2} r \sin 90^\circ - 2 r \cos 180^\circ = \frac{1}{2} r + 2 r = \frac{5}{2} r$ wird. Daher ist nach (§. 86. X.) für $x = 180^\circ$ der Werth von y weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Es fallen nämlich für $x = 180^\circ$ alle drey Sehnen in einen einzigen Punkt A zusammen.

Beysp. VI. 1. Es sey (Fig. V.) BAC ein gerader Kegel, der Halbmesser der Grundfläche $BF = x$, die Höhe $AF = z$, also die Seitenlinie $AB = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, und des Kegels krumme Seitenfläche $= \pi x \sqrt{(x^2 + z^2)}$, der Kubikinhalt $= \frac{1}{3} \pi x^2 z$, wenn π die Ludolphische Zahl 3,1415.. bedeutet.

2. Gesetzt also es sey der Kubikinhalt gegeben $= a^3 =$ einem Würfel, dessen Seite a. Man frägt, wie groß x und z seyn müssen, damit die krumme Seitenfläche des Kegels am Kleinsten werde, der Kegel also bey einem gegebenen körperlichen Raume $= a^3$, die kleinste Seitenfläche erhalte.

3. Weil demnach $\frac{1}{3}\pi x^2 z = a^3$ seyn soll, so erhält man $z = \frac{3a^3}{\pi x^2}$. Dies für z in den Ausdruck für des Kegels krumme Seitenfläche substituirt, giebt solche $= \frac{\sqrt{(\pi^2 x^6 + 9a^6)}}{x}$. Dieser Ausdruck soll also ein Kleinstes seyn.

Demnach setze man $y = \frac{\sqrt{(\pi^2 x^6 + 9a^6)}}{x}$ und zugleich der Kürze halber $\sqrt{(\pi^2 x^6 + 9a^6)} = w$, oder $y = \frac{w}{x}$ Dies giebt

$$dy = \frac{x\,dw - w\,dx}{x^2}$$

mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x\,dw}{dx} - w\right)$.

4. Nun ist $\pi^2 x^6 + 9a^6 = w^2$, also differenzirt $6\pi^2 x^5 dx = 2w\,dw$.

5. Und folglich $\frac{dw}{dx} = \frac{3\pi^2 x^5}{w}$. Mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{3\pi^2 x^6 - w^2}{w}\right);$$

welches man $= 0$ setzen muß.

6.

6. Man erhält also $3\pi^2 x^6 - w^2 = 0$; oder $3\pi^2 x^6 = w^2 = \pi^2 x^6 + 9a^6$ (3). Mithin $2\pi^2 x^6 = 9a^6$, woraus $x = a\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}$ folgt.

7. Daß für diesen Werth des Halbmessers x die krumme Kegelfläche $y = \frac{\sqrt{(\pi^2 x^6 + 9a^6)}}{x}$ ein Kleinstes wird, wird sich aus dem Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ergeben, welcher für $x = a\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}$ positiv wird.

Denn wegen $yx = w$ (3) erhält man $ydx + xdy = dw$ und wenn man nochmahls differenziirt, wobey dx constant bleibt

$$2dydx + xddy = ddw.$$

Mithin $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx}$.

Nun ist aber für $x = a\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}$ offenbar $\frac{dy}{dx} = 0$, weil eben dieser Werth von x aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ hergeleitet worden ist (5. 6). Mithin bleibt nur noch $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2w}{dx^2}$ für jenen Werth von x zu untersuchen übrig.

Aber wegen $\frac{dw}{dx} = \frac{3\pi^2 x^5}{w}$ (5) wird

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{15\pi^2 x^4}{w} - \frac{3\pi^2 x^5}{w^2} \cdot \frac{dw}{dx}.$$

Und folglich

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x}\,\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{3\pi^2 x^3}{w}\left(5 - \frac{x}{w} \cdot \frac{dw}{dx}\right)$$

$$= \frac{3\pi^2 x^3}{w}\left(5 - \frac{3\pi^2 x^6}{w^2}\right) \text{ aus (5)}$$

$$= \frac{3\pi^2 x^3}{w}\left(4 - \frac{3\pi^2 x^6 - w^2}{w^2}\right).$$

Nun ist aber für $x = a\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}$ der Werth von $3\pi^2 x^6 - w^2 = 0$ (6). Also schlechtweg

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12\pi^2 x^3}{w}.$$

Da dies positiv ist, weil die Werthe von w in (3) und von x in (6) wohl nicht negativ zu verstehen sind, so ist klar, daß für $x = a\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}$ die Kegelfläche $y = \frac{\sqrt{(\pi^2 x^6 + 9a^6)}}{x}$ ein Kleinstes seyn wird.

8. Setzt man in diesen Ausdruck wirklich statt x den gefundenen Werth, also $\pi^2 x^6 = \frac{9}{2} a^6$, so

wird

wird die kleinste Kegelfläche $= \frac{3a^2 \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}}$ oder $=$

$3a^2 \sqrt[6]{\frac{3}{4}\pi^2} = 3a^2 \sqrt[3]{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}$.

9. Der in (6) gefundene Halbmesser der Grundfläche des Kegels wird sich zur Höhe erhalten, oder $x:z = 1:\sqrt{2}$, welches aus (3) und (6) durch eine leichte Rechnung sich ergiebt.

§. 88.

Anmerkung.

1. Wir haben bisher angenommen, daß y bloß eine einförmige Funktion von x sey, also jedem Werthe von x nur ein y entspreche. Allein es können Fälle vorkommen, daß y eine vielförmige Funktion von x ist, mithin jedem x mehr als ein y zugehört, wie z. B. in der Gleichung für die Ellipse (§. 85.) die Ordinate y für jede Absciße x eigentlich zwey Werthe hat, nämlich $y = \pm \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{(\alpha x - x^2)}$.

Eben so könnte y durch x vermittelst einer Gleichung von einem höhern Grade gegeben seyn, z. B. $y^3 - 2xy - x^2 = 0$, wo y für jedes x so viel

Wer-

Werthe hat, als auf welche Potenz es in der Gleichung steigt; hier z. B. drey.

2. Man begreift indessen leicht, daß die bisherigen Vorschriften, die größten y zu finden, auch für diesen Fall gelten müssen. Denn wenn wir gleich keine allgemeine Regel haben, in einer solchen höhern Gleichung die Werthe von y allgemein durch x auszudrücken, so können wir uns doch vorstellen, daß es für y so viel verschiedene Ausdrücke durch x geben muß, als von welchem Grade y in der Gleichung ist. Jeder Ausdruck für sich kann als eine Funktion von x betrachtet werden, und man kann den Werth von x suchen, für welchen dieser Ausdruck ein Größtes oder Kleinstes wird.

3. Da wir nur quadratische Gleichungen völlig in unserer Gewalt haben, so wollen wir es durch ein Beyspiel erläutern.

Es sey also z. B. $y^2 - xy + x^3 = 0$; so ist $y = \frac{1}{2}x \pm x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$.

Also kann man erstlich untersuchen, für welche Werthe von x der Ausdruck $y = \frac{1}{2}x + x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ ein Größtes oder Kleinstes wird, und dazu würden also die bisherigen Regeln angewandt.

Dann

Dann kann man zweytens die Funktion $y = \frac{1}{2}x - x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ vornehmen, und bestimmen, für welche Werthe von x sie ein Größtes oder Kleinstes wird.

4. Und so werden demnach alle größte und kleinste Werthe der Funktion y überhaupt gefunden seyn.

5. Gedenkt man sich unter x, y Coordinaten einer krummen Linie, so stellen die besondern Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}x + x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$$
$$y = \frac{1}{2}x - x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$$

welche man aus der vorgegebenen $y^2 - xy + x^3 = 0$ abgeleitet hat, gleichsam die einzelnen Schenkel dieser krummen Linie dar, so wie z. B. in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + \frac{b}{a}x^2$; der Werth $y = +\sqrt{(bx + \frac{b}{a}x^2)}$, die obern Schenkel der Hyperbel und $y = -\sqrt{(bx + \frac{b}{a}x^2)}$ die untern giebt. Da kann man also begreiflich die Maxima und Minima von y in jedem solchen Schenkel untersuchen. In dem Beyspiele (3) wird der eine Werth von $y = \frac{1}{2}x - x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$, oder $y = x[\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)}]$ gar kein Größtes oder Kleinstes

stes geben, weil wenn x beständig wächst oder abnimmt, auch y beständig zugleich wächst oder abnimmt, wie durch eine leichte Betrachtung des Ausdrucks, ohne weitere Untersuchung von selbst erhellet. Es versteht sich, daß wenn x bejaht ist, es nicht größer als $\frac{1}{4}$ genommen werden darf, weil y sonst imaginär würde. Demnach kann nur in dem andern Werthe $y = \frac{1}{2}x + x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ vom Größten oder Kleinsten die Rede seyn.

Man findet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{(\frac{1}{4}-x)}} + \sqrt{(\frac{1}{4}-x)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}-x)} - 3x + \frac{1}{2}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}-x)}}.$$

Setzt man dies $= 0$, also $\sqrt{(\frac{1}{4} - x)} = 3x - \frac{1}{2}$, und quadrirt nun auf beyden Seiten, so erhält man $x = \frac{2}{9}$ und für diesen Werth wird y oder die Funktion $\frac{1}{2}x + x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)} = \frac{4}{27}$ ein Größtes, denn man wird finden, daß $\frac{ddy}{dx^2}$ für jenen Werth von x negativ wird.

6. Ohne indessen den Ausdruck $y = \frac{1}{2}x + x\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ erst aus der Gleichung $y^2 - xy + x^3 = 0$ zu entwickeln, kann diese Gleichung auch sogleich

gleich selbst zu dem verlangten Zwecke angewandt werden, welches in ähnlichen Fällen die Rechnung oft beträchtlich abkürzt. Denn wenn man differenziirt, so erhält man

$$(2y - x)\,dy + (3x^2 - y)\,dx = 0.$$

Mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{2y - x}$

welches $= 0$ gesetzt, $y - 3x^2 = 0$, oder $y = 3x^2$ giebt; und nun dies statt y in die Gleichung $y^2 - xy + x^3 = 0$ substituirt, $9x^4 - 3x^3 + x^3 = 0$, oder alles mit x^3 dividirt $x = \frac{2}{9}$, wie vorhin.

7. Um den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = \frac{2}{9}$ zu untersuchen, so setze man (6) der Kürze halber $y - 3x^2 = P$; $2y - x = Q$; so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}; \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{QdP}{dx} - \frac{PdQ}{dx}\right) : Q^2$$

Nun ist $\frac{dP}{dx} = \frac{dy}{dx} - 6x$; welches für $x = \frac{2}{9}$ sich in $-\frac{12}{9}$ verwandelt, weil $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, für $x = \frac{2}{9}$; denn dieser Werth von x ward ja aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ selbst abgeleitet. Ferner fällt auch der Theil $\frac{PdQ}{dx}$ weg, wegen $P = y - 3x^2$,

wel-

welches für $x = \frac{2}{9}$, ebenfalls $= 0$ wird (6). Denn nach bleibt für $\frac{d^2y}{dx^2}$ bloß der Werth $-\frac{12}{9Q}$; und da nun dieses negativ ausfällt, so wird $y = 3x^2 = \frac{4}{27}$ ein Größtes seyn.

8. Dies Beyspiel mag hinreichend seyn, den Gang des Verfahrens in andern Fällen, wo y eine vielförmige Funktion von x, und als unentwickelte Funktion von x, durch eine Gleichung zwischen y und x gegeben ist, zu erläutern. Aber wegen der Unvollkommenheit, oder vielmehr wegen des Mangels einer allgemeinen Auflösungsmethode höherer Gleichungen, wird es in vielen Fällen schwer seyn, die maxima und minima solcher Funktionen zu entwickeln, die auch zum Glück nicht häufig vorkommen.

§. 89.

Aufgabe.

Es sey z eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x, y, man verlangt die Werthe von x, y, für welche z ein Größtes oder Kleinstes wird.

Aufl. I. Diese Werthe von x und y, welche einem größten oder kleinsten z zugehören, müssen

so

so beschaffen seyn, daß wenn man sie um etwas wachsen oder abnehmen läßt, so daß x in $x \pm c$; y in $y \pm k$ sich verwandeln, die Werthe von z, welche man alsdann erhält, und welche ich die benachbarten von z nennen will, sämmtlich kleiner werden, als das z, welches ein Größtes seyn soll, und sämmtlich größer, als das z, welches ein Kleinstes seyn soll.

II. Es ist hier hinlänglich, bloß den Werth von z hinzuschreiben, wenn x sich in $x + c$, und y in $y + k$ verwandeln. Denn wenn man nachher in dem erhaltenen Ausdrucke c und k negativ setzt, so hat man auch die Werthe von z für $x - c$ und $y - k$. Oder man kann auch c positiv und k negativ, oder umgekehrt, nehmen, und so die entsprechenden Werthe von z erhalten.

III. Der Werth von z, wenn x sich in $x + c$, und y in $y + k$ verwandelt, heiße Z, so hat man nach (§. 71. Anmerk. II. das. V. das dortige z'' hier $= Z$ gesetzt)

$$Z = z + cp \quad + \frac{c^2}{2} q \quad + \text{ꝛc.}$$
$$+ k\left(\frac{dz}{dy}\right) + kc\left(\frac{dp}{dy}\right) + \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + \text{ꝛc.}$$

wo $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$; $q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ u. s. w. sind.

IV. Sind nun die Werthe von allen in dieser Reihe vorkommenden Differenzialquotienten endlich, so erhellet, daß man c und k so klein sich gedenken kann, daß alle Glieder, welche c^2, kc, k^2 und die höhern Produkte und Potenzen von k und c enthalten, als ganz unerheblich gegen die Glieder cp und $k\left(\frac{dz}{dy}\right)$ betrachtet werden können, so daß es verstattet ist, alsdann bloß

$$Z = z + cp + k\left(\frac{dz}{dy}\right) \text{ oder}$$
$$Z = z + c\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

zu setzen.

V. Da nun hier c, k entweder beyde positiv, oder beyde negativ genommen werden können, oder auch nur immer eines positiv, das andere negativ seyn kann (II) so ist klar, daß es für diese vier Vor-

aus-

aussetzungen vier Werthe von Z, als benachbarte von z giebt, welche ich denn der bessern Uebersicht wegen mit Z, Z′, Z″, Z‴ bezeichnen will. Sie werden seyn

$$Z\ = z + c\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$Z' = z + c\left(\frac{dz}{dx}\right) - k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$Z'' = z - c\left(\frac{dz}{dx}\right) - k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$Z''' = z - c\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

VI. Soll nun z ein Größtes seyn für ein gewisses x und y, so müssen alle vier Nachbarn von z, nämlich Z, Z′, Z″, Z‴ kleiner als z seyn. Aber dies ist hier wegen Verschiedenheit der Zeichen + und — in den einzelnen Gliedern, wie man leicht sieht, nicht möglich. Und eben so müßten jene vier Nachbarn sämmtlich größer seyn, als z, wenn z ein Kleinstes seyn soll, welches aus der angeführten Ursache ebenfalls unmöglich ist.

VII. Man muß also nothwendig $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ setzen, damit aus dem allgemeinen

Ausdrucke für Z (III) die zwey unmittelbar auf z folgenden Glieder cp oder $c\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $k\left(\frac{dz}{dy}\right)$ verschwinden, weil sonst z weder ein Größtes noch Kleinstes werden kann.

VIII. Aber wenn $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ ist, so sind dies ein paar Gleichungen, aus denen sich die Werthe von x und y ergeben, für welche z ein Größtes oder ein Kleinstes werden kann.

IX. Ob es dieses werden kann, kömmt nun auf die folgenden Glieder von Z an. Da nämlich, wenn $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ sind, der Werth von

$$Z = z + \frac{c^2}{2} q + \text{etc.}$$
$$+ kc\left(\frac{dp}{dy}\right) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + \text{etc.}$$

wird (III), so kann man wieder c und k sich so klein gedenken, daß die folgenden Glieder, gegen die hier hingeschriebenen, worinn c und k blos in der zweyten Dimension vorkommen, verschwinden. Und

so

so wäre denn z ein Größtes, wenn Z, wie auch c, k positiv oder negativ seyn mögen, allemahl $<$ z wird, und z ein Kleinstes, wenn Z allemahl $>$ z ausfällt.

Es versteht sich, daß man

X. in die Differenzialquotienten q, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$; $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)$; statt x, y allemahl die aus den Gleichungen (VIII) bestimmten Werthe dieser Größen x, y setzen muß, für welche denn

$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ oder q $= \mathfrak{J}$; $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \mathfrak{K}$; $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \mathfrak{L}$

werde.

XI. Man sollte nun glauben, daß bey dem Ausdrucke für Z in (IX) auch die Schwürigkeit (VI) statt fände, daß nämlich, wegen der verschiedenen Bezeichnungen die k und c haben können, ebenfalls z weder ein Größtes noch Kleinstes werden könnte. Allein durch eine leichte Ueberlegung läßt sich der Ausdruck (IX) unter einer Form darstellen, daß, wie auch c, k bejaht oder verneint seyn mögen, man aus dem Ausdrucke immer wird beurtheilen können, unter welchen Umständen allemahl Z $<$ z oder Z $>$ z seyn wird, mithin z ein Größtes oder Kleinstes werden kann.

XII. Man setze in den Ausdruck (IX) statt der Differenzial-Ausdrücke erstlich die Buchstaben (X) so wird auch

$$Z = z + \frac{c^2}{2} \mathfrak{J} + kc . \mathfrak{K} + \frac{k^2}{2} \mathfrak{L}$$

$$= z + \tfrac{1}{2}(c^2 \mathfrak{J} + 2kc\mathfrak{K} + k^2 . \mathfrak{L})$$

$$= z + \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}\left(c + k . \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}}\right)^2 + \frac{k^2}{2}\left(\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{J}}\right)$$

XIII. Hier erhellet nunmehr, daß es nicht mehr auf die Verschiedenheit der Bezeichnung von k und c ankömmt, um zu beurtheilen, ob Z grö- ßer oder kleiner als z ausfallen wird, sondern bloß auf das Verhalten von $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$. Denn man lasse c, k, wie man will, bejaht oder verneint seyn, so sind $\left(c + \frac{k\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}}\right)^2$ und k^2 immer bejaht. Es wird also nur auf die Factoren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{J}}$ ankommen, ob $Z >$ oder $< z$ seyn wird. Ist nämlich $\mathfrak{J}$ bejaht und $\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{J}} = 0$, oder auch bejaht, so ist allemahl $Z > z$, mithin z ein Kleinstes. Ist aber $\mathfrak{J}$ verneint und $\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{J}}$ entweder $= 0$, oder auch verneint, so ist allemahl $Z < z$, folglich z ein Größtes.

Da

Da indessen der Ausdruck für Z sich auch in folgender Form darstellen läßt

$$Z = z + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}\left(k - \frac{c\,\mathfrak{K}}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}c^2\left(\mathfrak{J} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{L}}\right)$$

so wird auch $Z > z$, mithin z ein Kleinstes, wenn $\mathfrak{L}$ bejaht, und $\mathfrak{J} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{L}} = 0$, oder auch bejaht ist; hingegen $Z < z$, mithin z ein Größtes, wenn $\mathfrak{L}$ verneint, und $\mathfrak{J} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{L}} = 0$, oder auch verneint ist.

Diese Regeln lassen sich kürzer so zusammenfassen. Wenn $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{L}$ beyde bejaht und $\mathfrak{J}.\mathfrak{L} > \mathfrak{K}^2$ oder auch nur $= \mathfrak{K}^2$ ist, so ist $Z > z$, also z ein Kleinstes.

Sind aber $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{L}$ beyde verneint und $\mathfrak{J}.\mathfrak{L} < \mathfrak{K}^2$, so ist $Z < z$, mithin z ein Größtes.

XIV. Es könnte sich aber auch eräugnen, daß $\mathfrak{J} = 0$; $\mathfrak{L} = 0$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{L} - \mathfrak{K}^2 = 0$ wären. In diesem Falle muß man zu den folgenden Gliedern der für Z gefundenen Reihe (III) fortgehen, und daraus abzuleiten suchen, unter welchen Bedingungen z ein Größtes oder Kleinstes seyn wird. Die Untersuchung wird aber dann zu weitläuftig, als daß sie hier vorgetragen werden könnte. Indessen wird es selten vorkommen, daß man mit den Vorschriften

(XIII) nicht ausreichen sollte, die wir jetzt durch ein paar Beyspiele erläutern wollen.

XV. Beysp. I. Es seyen x, y, u die drey Seitenlinien eines rechtwinklichten Parallelepipedum. Man sucht den Werth dieser drey Seitenlinien, wenn die Oberfläche des Parallelepipedum für einen gegebenen körperlichen Innhalt desselben $= a^3$, ein Kleinstes seyn soll.

Die Oberfläche des Parallelepipedum würde seyn $z = 2xy + 2ux + 2uy$; und der körperliche Raum $xyu = a^3$.

Dies giebt wegen $u = \frac{a^3}{xy}$

$$z = 2xy + \frac{2a^3}{y} + \frac{2a^3}{x}.$$

Und dieser Ausdruck soll ein Kleinstes seyn.

Dies giebt nach (§. 17. IV.)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 2y - \frac{2a^3}{x^2} = p \text{ (III.)}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = 2x - \frac{2a^3}{y^2}$$

Also vors erste die Gleichungen (VIII.)

2y

$$2y - \frac{2a^3}{x^2} = 0, \text{ oder } yx^2 - a^3 = 0$$

$$2x - \frac{2a^3}{y^2} = 0, \text{ oder } xy^2 - a^3 = 0$$

woraus $yx^2 = xy^2$ oder $x = y$ folgt; dies in die erste Gleichung substituirt, giebt $y^3 - a^3 = 0$; also $y = a$; mithin auch $x = a$; und $u = \frac{a^3}{xy}$ auch $= a$; also müssen die drey Seitenlinien des Parallelepipedum einander gleich seyn, d. h. der Würfel hat unter allen rechtwinklichen Parallelepipedis von gleichem körperlichen Raume $= a^3$ die kleinste Oberfläche.

Daß z für $x = y = u = a$, wirklich ein Kleinstes ist, erhellet aus (XIII).

Denn es ist $q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{4a^3}{x^3}$ welches für $x = a$ sich in $\mathfrak{J} = +4$ (X), also in eine positive Größe verwandelt.

Ferner ist $\left(\frac{dp}{dy}\right) = +2 = \mathfrak{K}$ (XV. X)

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{4a^3}{y^3} \text{ (XV.)}$$

welches für $y = a$ sich in $\mathfrak{L} = +4$ verwandelt. Dies giebt $\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{J}} = +3$ positiv. Demnach

 ist

ist für $x = y = u = a$, der Werth von z wirklich ein Kleinstes (XIII).

Beysp. II. 1. Innerhalb eines Dreyecks ABC (Fig. VI.) einen Punkt F zu finden, daß die Summe der drey Linien $AF + BF + CF$ ein Kleinstes sey.

Man nenne $BF = w$; $AF = y$; $FC = u$; $BA = c$; $AC = b$; den Winkel $BAC = \alpha$, und $BAF = x$, so hat man in dem Dreyecke BAF $BF = w = \sqrt{(c^2 - 2cy \cos x + y^2)}$. Und in dem Dreyecke AFC

$$FC = u = \sqrt{(b^2 - 2by \cos(\alpha - x) + y^2)}.$$

2. Nennt man also $AF + BF + CF = z$, so soll $z = y + \sqrt{(c^2 - 2cy \cos x + y^2)}$
$$+ \sqrt{(b^2 - 2by \cos(\alpha - x) + y^2)}$$
ein Kleinstes seyn, und der Winkel $BAF = x$, und $AF = y$ sind die Größen, die man sucht, um den Punkt F zu bestimmen, für welchen z ein Kleinstes ist.

3. Dies giebt erstlich, nach gehöriger Differenziation p oder

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{cy \sin x}{w} - \frac{by \sin(\alpha - x)}{u}$$

wo w, und u, die Wurzelgrößen in dem Ausdrucke für z bezeichnen.

4.

4. Sodann ferner

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = 1 + \frac{y - c.\cos x}{w} + \frac{y - b\cos(\alpha - x)}{u}$$

5. Die erste Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ (VIII.), giebt sogleich

$$\frac{c\sin x}{w} = \frac{b\sin(\alpha - x)}{u};\ (3)$$

d. h. wenn man auf die Verlängerung von AF die Perpendikel BN, CM fällt

$$\frac{BN}{BF} = \frac{CM}{CF}$$

wegen $BN = c\sin x$, und $CM = b\sin(\alpha - x)$.

Aber $\frac{BN}{BF} = \sin BFN$; und $\frac{CM}{CF} = \sin CFM$.

6. Also sind die beyden Winkel BFN und CFN, mithin AFB und AFC von gleicher Größe.

7. Die zweyte Gleichung $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ (VIII.)

giebt $1 - \frac{c\cos x - y}{w} = \frac{b\cos(\alpha - x) - y}{u};\ (4)$

oder wegen $c.\cos x - y = FN$, und $b\cos(\alpha - x) - y = FM$ die Gleichung

$$1 - \frac{FN}{BF} = \frac{FM}{CF} \text{ d. h.}$$

$$1 - \cos BFN = \cos CFM$$

oder wegen BFN = CFM, wie wir bereits gefunden haben (6)

$$1 - \cos BFN = \cos BFN.$$

Mithin ist $\cos BFN = \frac{1}{2}$; und folglich $BFN = 60^\circ$. Also $BFC = 120^\circ = AFB = AFC$ (6).

8. Soll also z oder die Summe der drey Linien $AF + BF + CF$ ein Kleinstes seyn, so muß der Punkt F so genommen werden, daß die drey Winkel AFB, BFC, AFC einander gleich $= 120^\circ$, oder auch die Winkel $BFN = CFM = 60^\circ$ werden.

9. Unter dieser gefundenen Bedingung ist es nunmehr leicht, die Werthe von x und y zu finden, wodurch denn die Lage des Punkts F bestimmt wird. Denn man hat in den Dreyecken ABF, AFC, wegen des äußern Winkels BFM oder $MFC = 60^\circ$

$$\sin 60^\circ : \sin(60^\circ - x) = c : y$$

$$\sin 60^\circ : \sin(60^\circ - \alpha + x) = b : y$$

Also $c \sin(60^\circ - x) = b \sin(60^\circ - \alpha + x)$, welches wegen

$$\sin(60^\circ - x) = \sin 60^\circ \cos x - \sin x \cos 60^\circ$$

und

$$\sin(60 - \alpha + x) = \sin(60^\circ - \alpha) \cos x + \sin x \cos(60^\circ - \alpha)$$

nach

nach einer leichten Rechnung für den Winkel x den Ausdruck

$$\tang x = \frac{c \sin 60° - b \sin(60° - \alpha)}{c . \cos 60° + b \cos(60° - \alpha)}$$

giebt, woraus denn, wenn x gefunden worden,

$$y = \frac{c \sin(60° - x)}{\sin 60°}$$

gleichfalls bekannt ist.

10. Daß für diese Werthe von x, y, der Ausdruck z (2) wirklich ein Kleinstes wird, würde sich durch Rechnung zeigen lassen, wenn man bewiese, daß für jene Werthe von x und y die Werthe der Differenzialquotienten $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \mathfrak{J}$, und $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \mathfrak{L}$ beyde bejaht, und $\mathfrak{J} . \mathfrak{L} > \mathfrak{K}^2$, d. h. größer als das Quadrat des Differenzialquotienten $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ oder auch nur $\mathfrak{J}\mathfrak{L} = \mathfrak{K}^2$ seyn würde (XIII). Man wird aber finden, daß diese Untersuchung auf eine ziemlich weitläuftige Rechnung führt, statt der man kürzer auf folgende Art verfahren kann.

Es ist offenbar einerley, ob man die Werthe jener Differenzialquotienten für die (9) gefundenen Werthe von x und y untersucht, oder sie für den Fall bestimmt, daß die Winkel BFN = CFM = 60°

sind,

sind, weil ja aus eben diesen Winkeln die Werthe von x, y selbst abgeleitet worden sind.

Ich suche also die Werthe von J, K, L für den Fall, daß BFN = CFM = 60° sind.

Vorerst muß man aber die Differenzialquotienten $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$; $\left(\frac{d p}{d y}\right)$; $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right)$ suchen, ehe die erwähnten Winkel BFN, CFM, dem gefundenen Werthe von 60° gleich genommen werden.

11. Ich setze demnach BFN = ψ; CFM = ψ' so ist (3. 5)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = y \sin \psi - y \sin \psi'$$

und (4. 7)

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = 1 - \cos \psi - \cos \psi'$$

wo wegen $\sin \psi = \frac{c \sin x}{w}$; und $\sin \psi' = \frac{b \sin(\alpha - x)}{u}$ und wegen $w = \sqrt{(c^2 - 2cy\cos x + y^2)}$ und $u = \sqrt{(b^2 - 2by\cos(\alpha - x) + y^2)}$, so wohl $\sin \psi$, $\sin \psi'$, als auch $\cos \psi$, $\cos \psi'$ Funktionen von x und y sind.

12. Dies giebt durch abermahlige Differenziation

$(d^2 z)$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = y \cos\psi \left(\frac{d\psi}{dx}\right) - y \cos\psi' \left(\frac{d\psi'}{dx}\right)$$

welches für $\psi = \psi' = 60^\circ$ sich in

$$\mathfrak{J} = y\left(\left(\frac{d\psi}{dx}\right) - \left(\frac{d\psi'}{dx}\right)\right) \cos 60^\circ$$

verwandelt, wo denn die Werthe der Differenzial-quotienten $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\psi'}{dx}\right)$ ebenfalls für $\psi = \psi' = 60^\circ$ genommen werden müssen. Ich will sie der Kürze halber μ und ν nennen, so ist

$$\mathfrak{J} = y(\mu - \nu) \cos 60^\circ.$$

13. Ferner ist (11)

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \sin\psi \left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \sin\psi' \left(\frac{d\psi'}{dy}\right)$$

welches sich für $\psi = \psi' = 60^\circ$, in

$$\mathfrak{L} = (m + n) \sin 60^\circ$$

verwandelt, wenn m, n, die Werthe von $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)$ $\left(\frac{d\psi'}{dy}\right)$ für $\psi = \psi' = 60^\circ$ bezeichnen.

14. Endlich ist (11) $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ oder

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \sin\psi + y\cos\psi\left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \sin\psi' + y\cos\psi'\left(\frac{d\psi'}{dy}\right)$$

wel-

welches sich für $\psi = \psi' = 60°$ in

$$\mathfrak{K} = y\,(m + n)\cos 60°$$

verwandelt. (13.)

15. Nun ist aber auch

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx} \quad (\S\S.\ 66.\ 67.)$$

Daher auch

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \sin\psi\left(\frac{d\psi}{dx}\right) - \sin\psi'\left(\frac{d\psi'}{dx}\right) \quad (11)$$

Oder für $\psi = \psi' = 60°$ auch

$$\mathfrak{K} = (\mu - \nu)\sin 60°. \quad (12.)$$

16. Aus

$$\mathfrak{K} = y\,(m + n)\cos 60° \text{ in } (14)$$

folgt (13)

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{K}}{y}\tan 60°$$

und aus $\mathfrak{K}$ (in 15) der Werth von

$\mathfrak{J} = \mathfrak{K}\,.\,y\,.\cot 60°$ (12.); mithin $\mathfrak{L}\,.\,\mathfrak{J} = \mathfrak{K}^2$.

17. Ist also in (16) $\mathfrak{K}$, d. h. $m+n$ eine positive Größe, so sind auch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{J}$ bejaht, und da $\mathfrak{J}\,.\,\mathfrak{L} = \mathfrak{K}^2$ ist, so würde z ein Kleinstes seyn (10). Es kommt also bloß darauf an, zu zeigen, daß $m+n$ eine bejahte Größe ist für $\psi = \psi' = 60°$, welches sich leicht auf folgende Art ergiebt.

18. Wegen $\sin\psi = \frac{c \sin x}{w}$ und

$$\cos\psi = \frac{c\cos x - y}{w}$$

hat man

$$w \sin\psi = c \sin x$$

$$y + w\cos\psi = c\cos x.$$

Also nach y differenziirt

$$w\cos\psi\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \sin\psi\left(\frac{dw}{dy}\right) = 0$$

$$1 - w\sin\psi\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \cos\psi\left(\frac{dw}{dy}\right) = 0$$

Multiplicirt man die obere Gleichung mit $\cos\psi$, und die untere mit $\sin\psi$, subtrahirt dann die untere von der obern, so wird, wegen $\sin\psi^2 + \cos\psi^2 = 1$

$$\left(\frac{d\psi}{dy}\right) = \frac{1}{w}\sin\psi.$$

Nach einer völlig ähnlichen Rechnung erhält man aus den Gleichungen

$$\sin\psi' = \frac{b\sin(\alpha - x)}{u}$$

$$\cos\psi' = \frac{b\cos(\alpha - x) - y}{u}$$

den Differenzialquotienten

$$\left(\frac{d\psi'}{dy}\right) = \frac{1}{u}\sin\psi'.$$

Dies giebt für $\psi = \psi' = 60^\circ$

$$\left(\frac{d\psi}{dy}\right) = m = \frac{1}{w} \sin 60^\circ \quad (13.)$$

$$\left(\frac{d\psi'}{dy}\right) = n = \frac{1}{u} \sin 60^\circ.$$

Mithin $m + n = \frac{w+u}{wu} \sin 60^\circ$ offenbar positiv. Daher (17) z wirklich ein Kleinstes.

§. 90.

Anmerkung.

Es kann zuweilen geschehen, daß die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ (§. 86. IX.) Werthe von x giebt, für welche mehrere von den Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. unendlich werden. In diesem Falle läßt sich bey der Anwendung der Taylorischen Reihe auf die Lehre vom Größten und Kleinsten, nichts aus solchen Werthen von x schließen, weil die bisherige Theorie des Größten und Kleinsten voraus setzt, daß alle Differenzialquotienten in der Taylorischen Reihe endlich sind, und die Reihe daher convergend ist, wenn man c (§. 86.) sehr klein nimmt.

Auch

Auch kann die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ in manchen Fällen gar keine Werthe von x zu geben scheinen, für welche y ein Größtes oder Kleinstes würde, und doch kann es dergleichen geben, wie die Betrachtung der Funktion y ausweiset.

Um dies durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die Funktion $y = b + \sqrt[3]{(a-x)^2}$.

Hier ist sogleich von selbst klar, daß $x = a$ die Funktion $y = b$ zu einem Kleinsten macht, weil, wenn man statt x einen etwas größeren oder kleineren Werth als a nimmt, man die benachbarten Werthe von y nämlich y', $y'' > b$ findet. Nämlich für $x = a + c$ erhält man $y'' = b + \sqrt[3]{(-c)^2} = b + \sqrt[3]{(+c^2)}$, und für $x = a - c$, wird $y' = b + \sqrt[3]{(+c^2)}$, mithin y', y'' beyde größer als b; daher $y = b$ ein Kleinstes.

Würde man aber dies auf dem gewöhnlichen Wege durch $\frac{dy}{dx} = 0$ suchen wollen, so würde man seines Zwecks verfehlen, weil $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(a-x)}}$ im Zähler die veränderliche Größe x nicht mehr enthält, so daß man durch Nullsetzung dieses Zählers

eine Gleichung erhielte, um das x, für welches y ein Größtes oder Kleinstes wird, zu finden, und wollte man den Nenner $\sqrt[3]{(a-x)} = \infty$ nehmen, um $\frac{dy}{dx} = 0$ zu machen, so würde man daraus gleichfalls nicht den wahren Werth $x = a$ finden, für welchen y ein Kleinstes ist. Man würde vielmehr hier den Nenner $= 0$ setzen müssen, um $x = a$ zu finden, aber dann ist nicht allein $\frac{dy}{dx} = \infty$, sondern auch alle höhern Differenzialquotienten würden unendlich werden, d. h. man würde ungewiß seyn, ob für $x = a$, y wirklich ein Kleinstes würde, wenn man es nicht aus der Beschaffenheit der Funktion y selbst schon wüßte.

Hr. Prof. Busse hat in einer Schrift: Neue Methode des Größten und Kleinsten. (Freyberg 1808) für den Fall, daß $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, neue Vorschriften für die Auffindung des Größten und Kleinsten zu geben versucht, welche näher untersucht zu werden verdienen.

Zum Glücke kommen solche Fälle, wo $\frac{dy}{dx}$ ꝛc. unendlich werden, nicht häufig vor, und oft kann man

man sich durch andere Betrachtungen in solchen zweifelhaften Fällen helfen. Z. B. man sieht sogleich, daß in dem vorigen Falle y ein Kleinstes oder Größtes seyn muß, wenn $\sqrt[3]{(a-x)^2}$, d. h. $(a-x)^2$ selbst ein solches ist, weil $(a-x)^2$ eine gerade Potenz von $(a-x)$ ist, und aus dieser eine Wurzel von einem ungeraden Exponenten gezogen wird, welche keine Zweydeutigkeit in Ansehung des Bejahten oder Verneinten zuläßt. Man suche also bloß, unter welchen Umständen $z = (a-x)^2$ ein Größtes oder Kleinstes wird.

Weil nun $\frac{dz}{dx} = -2(a-x)$, so hat man, wenn $\frac{dz}{dx} = 0$ gesetzt wird, $x = a$. Für diesen Werth wird nun $z = 0$ und also auch $y = b$ ein Kleinstes, weil $\frac{d^2z}{dx^2} = 2x$ bejaht ist.

Mehrere hieher gehörige Betrachtungen, wodurch die Rechnungen für das Größte oder Kleinste oft erleichtert werden können; s. m. in Eulers Instit. C. diff. P. II. §. 258. Meine Absicht verstattet nicht, weitläuftiger zu seyn.

§. 91.

Aufgabe.

Es sey AMNR eine krumme Linie (Fig. VII.), deren Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten CP = x, und PM = y gegeben sey. Auf einem und demselben Schenkel dieser krummen Linie, seyen M und N ein paar beliebige Punkte, durch welche man die gerade Linie MN ziehe, deren Verlängerung die Abscissen-Linie AW in S durchschneide. Man sucht die Entfernung dieses Punktes S von der gegebenen Ordinate PM, also die Weite PS.

Aufl. I. Wenn CP = x die Abscisse zur Ordinate PM = y, und CQ = x' die Abscisse zur Ordinate QN = y' ist, so wird, wenn man ML mit AW parallel ziehet, das Dreyeck MLN dem Dreyecke SPM ähnlich, mithin

$$LN : LM = PM : PS$$

d. h. $y' - y : x' - x = y : PS.$

Also $$PS = \frac{y(x' - x)}{y' - y}$$

oder

oder wenn man die Differenz $x' - x = \Delta x$, und $y' - y = \Delta y$ nennet

$$PS = \frac{y \cdot \Delta x}{\Delta y}.$$

II. Weil nun y' der Werth von y ist für $x' = x + \Delta x$, so ist nach dem Taylorischen Lehrsatz, das c in (§. 71.) $= \Delta x$ gesetzt

$$y' - y = \Delta y = \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ꝛc.}$$

oder wenn $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ꝛc. mit p, q ꝛc. bezeichnet werden (§. 72.)

$$\Delta y = p \cdot \Delta x + \frac{q}{1 \cdot 2} (\Delta x)^2 + \frac{r}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\Delta x)^3 \text{ ꝛc.}$$

III. Dies giebt den Werth von

$$PS = \frac{y}{p + \frac{1}{2} q \cdot \Delta x + \frac{1}{6} r (\Delta x)^2 \ldots} \quad \text{(I.)}$$

§. 92.

Zus. I. Je näher man sich die beyden Punkte M, N bey einander gedenkt, desto mehr wird sich die gerade Linie NMS einer Tangente an M nähern. Man stelle sich vor, die Linie NMS drehe sich um M, so, daß N und M immer näher zusammenrücken. In dem Augenblicke, daß M und N zu-

sammenfallen, mithin QN = PM; CQ = CP wird, verwandelt sich die schneidende Linie NS (Fig. VII.) in eine Tangente MT an M, wie (Fig. VIII.) nnd PS (Fig. VII.) in die sogenannte Subtangente PT (Fig. VIII.)

Zus. II. Diese Subtangente für den Punkt M also zu finden, muß man in (§. 91. III.) den Werth von PS für $x' = x$, d. h. für $\Delta x = 0$ (Zus. I.) suchen.

Also ist die Subtangente

$$PT = \frac{y}{p} = \frac{y\,dx}{dy}.$$

Zus. III. Dies giebt ferner für die Länge der Tangente MT die Formel

$$MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2}{p^2}\right)}$$

oder $MT = \frac{y}{p}\sqrt{(1 + p^2)}$.

Und für den Winkel T, den die Tangente mit der Absciſſen-Linie macht, $\tan T = \frac{PM}{PT}$ oder

$$\tan T = p = \frac{dy}{dx}.$$

Aus

Aus welchen Formeln denn die Lage der Tangente gegen die Abscissen-Linie bestimmt werden kann, wenn der Punkt M gegeben ist.

Zus. IV. Für den Winkel, welchen die Tangente MT mit der Ordinate PM macht, ist

$$\text{tang PMT} = \cot T = \frac{dx}{dy}.$$

Zus. V. Wenn MR (Fig. VIII.) auf die Tangente senkrecht ist, und die Abscissen-Linie in R durchschneidet, so heißt MR eine Normal-Linie an M, und PR die Sub-Normal-Linie.

Für diese Sub-Normal-Linie hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke MPR, MPT

$$PT : PM = PM : PR$$

d. i. $$\frac{y}{p} : y = y : PR.$$

Also die

Sub-Normal-Linie $PR = p \cdot y = \frac{y\,dy}{dx}$

und die Normal-Linie $MR = \sqrt{(PR^2 + PM^2)}$
$= \sqrt{(p^2 y^2 + y^2)} = y\sqrt{(1 + p^2)}$.

Endlich für den Winkel R, welchen die Normal-Linie mit der Abscissen-Linie macht

$$\text{tang } R = \cot T = \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy}.$$

Anmerkung. Gewöhnlich leitet man die Formel für die Subtangente (Zus. II.) sogleich aus der Formel

$$PS = \frac{y\Delta x}{\Delta y} \text{ (§. 91. I.)}$$

ab, indem man (Fig. VII.) die endlichen Differenzen $ML = PQ = \Delta x$ und $NL = \Delta y$ sich in die Differenzialien dx und dy verwandeln läßt, wodurch die schneidende Linie NMS sich ohne Ende der Tangente an M, und folglich PS ohne Ende sich der Subtangente für den Punkt M nähert. Man betrachtet hiebey zugleich das Bogenelement MN als ein unendlich kleines Stückchen der Tangente an M, und den Ausdruck $\frac{ydx}{dy}$, dem sich die Subtangente ohne Ende immer mehr und mehr nähert, als den Werth der Subtangente selbst, eine Vorstellung, welche durch die zu Anfange der Differenzialrechnung vorgetragenen Sätze vollkommen gerechtfertigt wird. Indessen mögte die (Zus. I. II.) gewählte Darstellungsart, vermöge der man die Punkte N, M, nicht bloß ohne Ende sich immer mehr und mehr nähern, sondern völlig zusammenfallen läßt, um die schneidende Linie NMS in eine Tangente zu verwandeln, vielen doch wohl noch überzeugender vorkommen.

§. 93.

§. 93.

Aufgabe.

Tangenten an krumme Linien zu ziehen, wenn die Ordinaten nicht wie (§. 91.) mit einander parallel, sondern aus einem Punkte ausgehen, wie CA, CM, CN (Fig. IX.), wo CA die erste oder Anfangs-Ordinate sey, von der jede andere, wie CM $= z$, um den veränderlichen Winkel ACM $= \varphi$ abstehe.

Aufl. I. Da für diesen Fall eine Gleichung zwischen CM $= z$ (dem sogenannten Radius vector) und dem Winkel ACM $= \varphi$ gegeben seyn muß, wodurch denn z eine Funktion von φ wird, so sey nunmehr N welcher andere Punkt man will, und für ihn ACN $= \varphi' = \varphi + \Delta\varphi$, und CN $= z'$ $= z + \Delta z$. Weil nun z eine Funktion von φ ist, so wird nach dem Taylorischen Lehrsatz

$$z' = z + \Delta\varphi \frac{dz}{d\varphi} + \tfrac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 \frac{d^2z}{d\varphi^2} \ldots$$

Mithin $z' - z = \Delta\varphi \frac{dz}{d\varphi} + \tfrac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 \frac{d^2z}{d\varphi^2} \ldots$

II. Man ziehe durch N, M die gerade Linie NMS, und von M, das Perpendikel ML auf CN, so hat man

ML

$$ML = CM \sin MCL = z \sin(\varphi' - \varphi)$$

$$CL = CM \cos MCL = z \cos(\varphi' - \varphi)$$

Und folglich

$$NL = CN - CL = z' - z \cos(\varphi' - \varphi)$$

$$\tan SNC = \frac{ML}{NL} = \frac{z \sin(\varphi' - \varphi)}{z' - z \cos(\varphi' - \varphi)}$$

oder $\tan SNC = \dfrac{z \sin \Delta\varphi}{z' - z \cos \Delta\varphi}$.

III. Nun ist nach (§. 74.) das daselbst im 3ten Beyspiele vorkommende $c = \Delta\varphi$ gesetzt

$$\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi - \frac{(\Delta\varphi)^3}{1.2.3} + \frac{(\Delta\varphi)^5}{1.2.3.4.5} \text{ u. s. w.}$$

$$\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{1.2} + \frac{(\Delta\varphi)^4}{1.2.3.4} \text{ u. s. w.}$$

IV. Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck für tang SNC (II), so erhält man

$$\tan SNC = \frac{z\Delta\varphi[1 - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^2 + \frac{1}{120}(\Delta\varphi)^4 ..]}{z' - z + z[\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 - \frac{1}{24}(\Delta\varphi)^4 ..]}$$

und nun ferner statt $z' - z$ den Werth (I) gesetzt

$$\tan SNC = \frac{z[1 - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^2 + \ldots)}{p + \frac{1}{2}\Delta\varphi . q \ldots + z(\frac{1}{2}\Delta\varphi - \ldots)}$$

wo der Kürze halber in (I)

$$\frac{dz}{d\varphi} = p;\ \frac{d^2 z}{d\varphi^2} = q \text{ u. s. w.}$$

gesetzt worden ist.

V.

V. Nun lasse man wiederum wie (§. 92. Zus. I.) die schneidende Linie NMS um M sich drehen, daß der Punkt N mit M zusammenfällt, so wird sich die Linie NMS in eine Tangente MT an M (Fig. X.) und der Winkel SNC (IV.) in den Winkel CMT (Fig. X.) verwandeln.

Um demnach dieses Winkels CMT Größe zu erhalten, muß man in (IV.) $\Delta\varphi = 0$ setzen. Hiedurch wird denn

$$\tan \mathrm{CMT} = \frac{z}{p} = \frac{z\,d\varphi}{dz}.$$

Und so ist denn die Lage der Tangente MT gegen die Ordinate CM = z bestimmt.

VI. Kürzer kann man diese Formel sogleich aus dem Ausdruck (II) ableiten, wenn man in diesem statt der endlichen Differenz $\Delta\varphi$, das Differenzial $d\varphi$ setzt, wodurch sin $\Delta\varphi$ sich ohne Ende dem Werthe $d\varphi$ und cos $\Delta\varphi$ dem Werthe 1 nähert. Aber dann nähert sich zugleich der Winkel SNC ohne Ende dem Winkel, den die Tangente an M mit der Ordinate CM macht, d. h. (Fig. X.) dem Winkel CMT, und man erhält auf diese Art

$$\tan \mathrm{CMT} = \frac{z\,d\varphi}{z' - z} = \frac{z\,d\varphi}{dz}$$

wie-

wie in (V). Wenn man indessen bey dieser Abkürzungsmethode alles vollkommen scharf erweisen will, so wird sie nicht viel kürzer, als das von mir gewählte Verfahren (IV. V.), bey welchem man wie (§. 92. Anm.) die Punkte N und M völlig zusammenfallen läßt, um die Tangente an M zu erhalten.

§. 94.

Zus. I. Man ziehe durch C (Fig. X.) eine gerade Linie CW senkrecht auf die Ordinate CM, so ist, wenn sie der Tangente an M in T begegnet

$$CT = CM \tan CMT = \frac{z^2 d\varphi}{dz}.$$

Man darf also auch nur CT dem Werthe $\frac{z^2 d\varphi}{dz}$ gleich nehmen, und von T nach M ziehen, so wird TM die krumme Linie in M berühren.

Für die Länge MT dieser Tangente ist

$$MT = \sqrt{(CT^2 + CM^2)} = \sqrt{\left(\frac{z^4 d\varphi^2}{dz^2} + z^2\right)}$$

Oder

$$MT = z\sqrt{\left(1 + \frac{z^2 d\varphi^2}{dz^2}\right)} = z \sec CMT.$$

Zus. II. Es sey MR eine Normal-Linie an M, welche dem Perpendikel CT auf CM in R begegne, so ist

$$CR = CM \,.\, \text{tang}\, CMR = z \cot CMT.$$

Oder $CR = \frac{dz}{d\varphi}$ (§. 93. VI.)

Für den Winkel R ist

$$\text{tang}\, R = \text{tang}\, CMT = \frac{z\,d\varphi}{dz} \text{ (§. 93. VI.)}$$

und für die Länge der Normal-Linie

$$MR = \surd(CM^2 + CR^2) = \surd\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)$$

Zus. III. Die Winkel PMT (§. 92. Zus. IV.) und CMT (§. 93. VI.) werden zu rechten Winkeln, d. h. die Tangenten MT stehen auf den Ordinaten senkrecht, wenn die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dy}$; $\frac{d\varphi}{dz}$ unendlich, d. h. $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dz}{d\varphi} = 0$ werden.

Aber die Gleichungen $\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dz}{d\varphi} = 0$ geben diejenigen Werthe von x und φ, für welche die Funktionen y, z größte oder kleinste Werthe erhalten. (§. 86. VII.)

An welchen Punkten einer krummen Linie also größte oder kleinste Ordinaten statt finden, an solchen stehen die Berührungs-Linien allemahl auf den Ordinaten senkrecht.

§. 95.

Wir wollen nun die Aufgaben (§. 93. 94.) durch ein paar Beyspiele erläutern.

Beysp. I. 1. Die Gleichung für die krumme Linie sey zwischen senkrechten Coordinaten

$$y^2 = \alpha x + \beta x^2$$

so ist die krumme Linie eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem β negativ, positiv, oder $= 0$ ist. Bey der Parabel ist dann α der Parameter, und bey der Ellipse und Hyperbel $\alpha = \frac{c^2}{a}$; $\beta = \mp \frac{c^2}{a^2}$, wenn c, a, die kleine und große Axe bedeuten.

2. Die Gleichung (1) giebt nun differenzlirt, sogleich

$$\frac{2y\,dy}{dx} = \alpha + 2\beta x$$

und hieraus die

$$\text{Sub-Normal-Linie} = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{\alpha + 2\beta x}{2}.$$

Fer-

Ferner $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{\alpha + 2\beta x} = \text{tang } R$ für den Winkel der Normal-Linie mit der Abscissen-Linie; und $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + 2\beta x}{2y} = \text{tang } T$ für den Winkel der Tangente mit der Abscissen-Linie. (§. 92. Z. V.)

Sodann die Subtangente $= \frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2}{\alpha + 2\beta x}$.

3. Für die Parabel hat man $\beta = 0$; demnach die Sub-Normal-Linie $= \frac{1}{2}\alpha$. (2)

4. Also hat die Parabel die Eigenschaft, daß die Sub-Normal-Linie einer constanten Größe, nämlich dem halben Parameter gleich ist.

Aber die Subtangente der Parabel ist $\frac{2y^2}{\alpha} = \frac{2\alpha x}{\alpha}$ $= 2x$ der doppelten Abscisse gleich.

5. Für Ellipse und Hyperbel findet sich $\alpha + 2\beta x = \frac{c^2}{a^2}(a \mp 2x)$; (2). Mithin die

Subtangente $= \frac{2y^2}{\alpha + 2\beta x} = \frac{2x(a \mp x)}{a \mp 2x}$

wegen

$$y^2 = \frac{c^2}{a}x \mp \frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax \mp x^2)$$

Und die Sub-Normal-Linie $= \frac{c^2}{2a^2}(a \mp 2x)$ in welchen Formeln das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt.

Aus diesen analytischen Ausdrücken kann man leicht Vorschriften ableiten, die Tangenten und Normal-Linien durch eine geometrische Construktion zu finden, worüber man in den Schriften, welche besonders von den krummen Linien handeln, das weitere nachlesen kann.

Für die krummen Linien der zweyten Ordnung hat Hr. Placidus Heinrich eine Schrift de sectionibus conicis tractatus analyticus (Ratisb.) herausgegeben, welche Anfängern empfohlen zu werden verdient.

Beysp. II. Es sey für Ordinaten aus einem Punkte

$$z = r \cdot \frac{\varphi^o}{360^o}$$

wo der Winkel φ in Graden gegeben sey, so ist die krumme Linie eine archimedische Spiral-Linie, in der die Anfangs-Ordinate CA $= r$, d. h. dem Halbmesser des Kreises gleich ist, welcher bey der Construktion der Spiral-Linie gebraucht wird. (Fig. X.)

Der

Der Quotient $\frac{\varphi^\circ}{360^\circ}$ ist auch $= \frac{\varphi}{2.\pi}$; wenn man den Winkel φ, oder vielmehr den ihn messenden Bogen in Decimaltheilen des Halbmessers 1 ausdrückt, und π die Ludolphische Zahl bedeutet.

Dies giebt $z = \frac{r\varphi}{2\pi}$.

Mithin (§. 93. VI.) für den Winkel der Tangente mit der Ordinate

$$\text{tang } CMT = \frac{z\,d\varphi}{dz} = \frac{\frac{r\varphi}{2\pi} \cdot d\varphi}{\frac{r}{2\pi} \cdot d\varphi} = \varphi.$$

Also ist die Tangente des Winkels CMT gleich dem Bogen φ oder dem Maaße des Winkels ACM in Decimaltheilen des Halbmessers 1. [Z. B. wenn der Winkel ACM (Fig. X.) $= 30^\circ . 4'$ wäre, so hätte man tang CMT $=$ Bog. $30^\circ +$ Bog. $4' = 0{,}5235987 + 0{,}0011635 = 0{,}5247622$, mithin CMT $= 27^\circ . 41'$.]

Ferner wird

$$CT = \frac{z^2\,d\varphi}{dz} = \frac{r\varphi^2}{2\pi} \text{ (§. 94. Zus. I.)}$$

$$CR = \frac{dz}{d\varphi} = \frac{r}{2\pi}$$

d. h. CR ist einer beständigen Linie gleich.

Beysp. III. Es sey für eine logarithmische Linie die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten

$$a \log \frac{y}{b} = x$$

wo a, b beständige Linien, und $\log \frac{y}{b}$ den Logarithmen der Zahl $\frac{y}{b}$ in einem System, dessen Modulus = M ist, bezeichne, so ist wegen $d \log \frac{y}{b} = \frac{M dy}{y}$ (§. 24. das dortige $x = \frac{y}{b}$ gesetzt)

$$a \cdot \frac{M . dy}{y} = dx.$$

Also die Subtangente der logarithmischen Linie nämlich

$$\frac{y dx}{dy} = M . a$$

einer beständigen Größe gleich.

Die Bestimmungen für die Normallinie u. s. w. übergehe ich, so wie es überhaupt unnöthig ist, die Anwendung der (§§. 93. 94) gefundenen Formeln, noch durch Beyspiele von andern krummen Linien zu erläutern, da die gefundenen Formeln auf bloßen

Dif-

Differenziationen beruhen, und der Zweck dieses Buches nicht die Lehre von den krummen Linien ist, sondern vielmehr auch aus dieser nur Beyspiele zur Erläuterung des mannichfaltigen Gebrauchs der Differenzialrechnung genommen werden.

§. 96.

Aufgabe.

Es sey AM (Fig. VII.) ein Bogen von einer krummen Linie, für welche eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $CP = x$ und $PM = y$ gegeben ist. Indem die Abscisse CP um $PQ = \Delta x$, und die Ordinate PM um $NL = \Delta y$ sich ändert, ändere sich der Bogen $AM = s$ um $MN = \Delta s$. Man sucht das Verhältniß des Bogens $MN = \Delta s$, zu seiner Sehne MN, für den Fall, daß Δx, und folglich auch Δy und Δs, ohne Ende immer mehr und mehr abnehmen, oder sich in die Differenziale, dx, dy, ds, verwandeln.

Aufl. I. Die Sehne oder gerade Linie MN, als Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks MNL ist $= \surd(ML^2 + NL^2) = \surd(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.

II. Nun ist der Bogen MN allemahl größer, als seine Sehne, mithin

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} > 1.$$

Man setze demnach

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} = 1 + m$$

so ist m eine positive Größe, die aber ohne Ende immer mehr und mehr abnimmt, je kleiner Δx und folglich auch Δy, und Δs werden, weil sich die Sehne MN ihrem Bogen, ohne Ende mehr und mehr nähert, je näher N an M rückt. Wenn also die endlichen Differenzen Δx, Δy, Δs ohne Ende immer mehr und mehr abnehmen, d. h. sich in die Differenziale dx, dy, ds, verwandeln, so nähert sich der Quotient $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ ohne Ende immer mehr und mehr der 1, d. h. man hat

$$\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 1$$

welches man auch durch die Gleichung $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ausdrücken kann, wo denn ds das Differenzial des Bogens s, oder das Bogenelement durch die Differenziale der Abscisse und Ordinate gegeben ist.

III. Weil y eine Funktion von x ist, so sey $dy = p\,dx$; dann hat man auch

$$ds = dx\sqrt{(1 + p^2)}.$$

s wird also eine solche Funktion von x seyn müssen, daß $ds = dx\sqrt{(1 + p^2)}$ wird.

§. 97.

Aufgabe.

Eine krumme Linie BMNL (Fig. XI.), werde von einem Kreise HMNR in zwey Punkten M, N geschnitten. Man frägt nach den Bedingungsgleichungen, wenn der Punkt N ohne Ende immer näher und näher an M rückt, und endlich beyde Punkte in einen M zusammenfallen, so daß der Kreis die krumme Linie in M berührt.

Aufl. I. Dem Punkte M der krummen Linie gehöre die Abscisse $AP = x$ und Ordinate $PM = y$ zu, und beyde seyen auf einander senkrecht.

II. Zu dem Punkte N gehöre eben so die Abscisse $AQ = x + \Delta x$, und Ordinate $y + \Delta y = y' = QN$.

III. In so fern aber eben diese Punkte auch in dem Umfange des Kreises liegen sollen, will ich die

Ordinaten PM, QN, als zum Kreise gehörig, mit w, w' bezeichnen. So wie nämlich y für die Abscisse x aus der Gleichung für die krumme Linie bestimmt wird, erhält man w für die Abscisse x aus der Gleichung für den Kreis.

IV. C sey der Mittelpunkt des Kreises, und CD auf die Abscissen-Linie senkrecht, so ist C durch AD = a, und CD = b bestimmt. Der Halbmesser CM des Kreises heiße c, so ist, wenn CK parallel mit AD gezogen worden,

$$CM^2 = CK^2 + KM^2. \text{ Oder}$$

$$c^2 = (a-x)^2 + (w-b)^2$$

die Gleichung für den Kreis, in Bezug auf die Abscissen-Linie AD.

V. In so ferne nun die Punkte M, N, sowohl in der krummen Linie, als in dem Umfange des Kreises liegen sollen, hat man für diese Punkte

$$y = w$$

$$\text{und } y' = w'$$

VI. Aber weil y eine gegebene Funktion von x ist, so hat man nach den Taylorischen Lehrsatz

$$y' = y + p(\Delta x) + \frac{q}{1.2}(\Delta x)^2 + \frac{r}{1.2.3}(\Delta x)^3 \text{ etc.}$$

wo p, q, r etc. der Ordnung nach, die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. bedeuten.

VII.

VII. Und eben so, in so ferne vermöge der Gleichung (IV) auch w eine Funktion von x ist,

$$w' = w + P . \Delta x + \frac{Q}{1.2} (\Delta x)^2 + \frac{R}{1.2.3} (\Delta x)^3 \text{ ꝛc.}$$

wo P, Q, ꝛc. der Ordnung nach, die Differenzialquotienten $\frac{dw}{dx}$; $\frac{d^2w}{dx^2}$ ꝛc. bezeichnen.

VIII. Weil nun für die Punkte M, N; $y = w$; und $y' = w'$ ist, so erhält man hieraus und aus (VI. VII.) sehr leicht die Gleichung

$$p + \frac{q}{1.2} \Delta x + \frac{r}{1.2.3} (\Delta x)^2 \text{ ꝛc.} = P + \frac{Q}{1.2} \Delta x + \frac{R}{1.2.3} (\Delta x)^2 \text{ ꝛc.}$$

IX. Sollen nun die Punkte N und M zusammenfallen, damit der Kreis die krumme Linie in M berühre (wie Fig. XII.), so muß man $\Delta x = 0$ setzen, woraus denn (VIII) $p = P$, d. h. $\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx}$ folgt.

X. Man sieht also, daß die Bedingungsgleichungen unter denen der Kreis HMNR die krumme Linie berühren wird

$$w = y \quad \text{(V.)}$$

und $$\frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad \text{(IX.)}$$

sind.

§. 98.

Zusatz I. Aus den beyden Gleichungen am Ende des vorigen §es folgt

$$\frac{wdw}{dx} = \frac{ydy}{dx}.$$

Nun ist aber $\frac{wdw}{dx}$ der Werth der Sub-Normal-Linie in dem Kreise für den Punkt M, so wie $\frac{ydy}{dx}$ der Werth der Sub-Normal-Linie in der krummen Linie für eben diesen Punkt M (§. 92. Zus. V.) Also haben die krumme Linie und der Kreis an dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte M einerley Sub-Normal-Linie PZ, wo denn Z nothwendig in der Verlängerung des Halbmessers MC liegen muß, weil die Halbmesser auf dem Umfange des Kreises normal sind.

Zusatz II. Hieraus folgt denn, daß der Kreis mit der krummen Linie auch eine gemeinschaftliche Tangente an M haben wird; welches auch aus der Gleichung

$$\frac{wdx}{dw} = \frac{ydx}{dy}$$

wel-

welche man aus obigen sehr leicht ableitet, gefolgert werden kann. Denn $\frac{ydx}{dy}$ und $\frac{wdx}{dw}$ drücken die Subtangenten an M aus.

Zus. III. Ohnstreitig lassen sich unzählige Kreise ziehen, welche sämmtlich die krumme Linie in M berühren, und mit dieser eine gemeinschaftliche Tangente an M haben. Daß die Mittelpunkte dieser Berührungskreise sich alle in der Normal-Linie MZ oder deren Verlängerung befinden, weiß man schon aus der Elementargeometrie. Man kann diese Sätze aber auch analytisch aus der Betrachtung ableiten, daß wenn man für den gegebenen Punkt M die Coordinaten x, y, als gegeben, hingegen für den Mittelpunkt und Halbmesser des zu bestimmenden Berührungskreises die Größen a, b, c als unbekannte ansieht, die obigen Bedingungsgleichungen nicht hinreichend sind, diese Größen a, b, c, vollkommen zu bestimmen, daß es demnach unzählige Kreise durch M geben muß, welche die krumme Linie berühren.

Um die Sache durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die krumme Linie eine Parabel, deren Parameter $= \alpha$, so hat man $y^2 = \alpha x$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{2y}$.

Fer-

Ferner durch Differenziation aus der Gleichung für den Kreis (§. 97. IV.)

$$(w - b)\, dw - (a - x)\, dx = 0$$

oder $\frac{dw}{dx} = \frac{a-x}{w-b}$.

Die Bedingungsgleichung $\frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx}$ (§. 97. X.) verwandelt sich also in

$$\frac{a-x}{w-b} = \frac{\alpha}{2y}$$

oder wegen der zweyten Bedingungsgleichung $w = y$ in

$$\frac{a-x}{y-b} = \frac{\alpha}{2y}.$$

Es erhellet also, daß diese Gleichung, worin a, b für den gesuchten Mittelpunkt C des Berührungskreises, als die unbekannten Größen zu betrachten sind, nicht hinreichend ist, diese Größen zu bestimmen. Man kann a willkürlich annehmen, und daraus $b = y - \frac{2y(a-x)}{\alpha}$ finden. Aber eben weil man a willkürlich annehmen kann, giebt es unzählige Mittelpunkte für Berührungskreise, die dann vermöge (Zus. I.) alle in der Normallinie MZ oder deren Verlängerung liegen werden.

Hat

Hat man b aus a gefunden, so ist für den Halbmesser des Berührungskreises

$$c = \sqrt{[(a-x)^2 + (w-b)^2]}$$

oder wegen $w = y$

$$c = \sqrt{[(a-x)^2 + (y-b)^2]}$$

wo statt y auch $\sqrt{\alpha x}$ gesetzt werden kann.

Zus. IV. Unter den unzähligen Kreisen, welche die krumme Linie in M berühren können, wird es einen geben, welcher in Rücksicht seiner Krümmung bey M sich am wenigsten von der krummen Linie entfernt, dessen Ordinaten also sich denen der krummen Linie möglichst nähern. Diesen Kreis nennt man den Krümmungs-Kreis (circulus osculator), und den Halbmesser desselben, den Krümmungs-Halbmesser (radius osculi, radius curvaturae).

Es sey (Fig. XIII.) Mm ein kleiner Bogen eines die krumme Linie in M berührenden Kreises Mϱ, und $Tm = W$, $Tn = Y$ Ordinaten des Kreises und der krummen Linie für eine gemeinschaftliche Abscisse $AT = AP + PT = x + k$, wo x die zum Berührungspunkte M gehörige Abscisse, und k eine sehr kleine Größe bezeichne, so hat man nach dem Taylorischen Theorem

W

$$W = w + Pk + \tfrac{1}{2}Qk^2 + \tfrac{1}{6}Rk^3 \text{ ꝛc.}$$
$$Y = y + pk + \tfrac{1}{2}qk^2 + \tfrac{1}{6}rk^3 \text{ ꝛc.}$$

Weil aber die krumme Linie und der Kreis sich berühren sollen, so hat man die Bedingungsgleichungen $w = y$; $P = p$ (§. 97.) Demnach auch $w + Pk = y + pk$, welches ich $= A$ nennen will. Mithin

$$W = A + \tfrac{1}{2}Qk^2 + \tfrac{1}{6}Rk^3 \ldots$$
$$Y = A + \tfrac{1}{2}qk^2 + \tfrac{1}{6}rk^3 \ldots$$

Man gedenke sich nun k so klein, daß die Glieder, worinn k^3, $k^3 \ldots$ vorkommen, als verschwindend gegen Qk^2, qk^2 betrachtet werden können, so ist

$$W = A + \tfrac{1}{2}Qk^2$$
$$Y = A + \tfrac{1}{2}qk^2$$

oder

$$W : Y = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{Q}{A}k^2 : 1 + \tfrac{1}{2}\frac{q}{A}k^2$$

d. h. je mehr sich Q und q dem Verhältnisse der Gleichheit nähern, desto mehr wird dies auch der Fall bey den Ordinaten W und Y seyn. Unter allen Kreisen, welche die krumme Linie in M berühren, wird also derjenige sich der krummen Linie am meisten nähern, für welchen $q = Q$ ist, und die Bedingung, unter der ein Berührungs-Kreis ein Krümmungs-Kreis werden kann, ist demnach $q = Q$ oder

oder $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddw}{dx^2}$, aus welchen Betrachtungen nunmehr leicht die Formel für den Krümmungs-Halbmesser abgeleitet werden kann.

§. 99.

Aufgabe.

Es ist für eine krumme Linie die Gleichung zwischen senkrechten Coordinaten gegeben, man soll für einen gegebenen Punkt derselben, den Krümmungs-Halbmesser finden.

Aufl. 1. Dem gegebenen Punkte gehöre eine Abscisse $= x$ und Ordinate $= y$ zu, und eben diesem Punkte in dem Krümmungs-Kreise die Abscisse x und Ordinate w. Der Krümmungs-Halbmesser heiße ϱ, so hat man vermöge der Gleichung des Kreises (§. 97. IV.) ϱ statt des dortigen c gesetzt,

$$\varrho = \sqrt{[(a-x)^2 + (w-b)^2]}.$$

2. Sodann vermöge dessen, daß der Kreis die krumme Linie berühren soll (§. 97. V.IX.)

$$w = y; \quad \text{und } P = p$$

und daß er ein Krümmungs-Kreis seyn soll

$$Q = q \text{ (§. 98. (Zus. IV.)}$$

d. h.

d. h. $w = y$; $\frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx}$; und $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ wobey das Differenzial dx als unveränderlich angesehen wird, wie bey allen Anwendungen des Taylorischen Lehrsatzes der Fall ist.

3. Aus (1) wird auch

$$\varrho = (w - b) \sqrt{\left(1 + \left(\frac{a - x}{w - b}\right)^2\right)}$$

oder wegen $\frac{a - x}{w - b} = \frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx}$ (2) $= p$

$$\varrho = (w - b) \sqrt{(1 + p^2)}.$$

4. Ferner aus $\frac{dw}{dx} = \frac{a - x}{w - b}$ erhält man

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{(w-b) + (a-x)\frac{dw}{dx}}{(w-b)^2}$$

$$= -\frac{1 + \frac{a-x}{w-b} \cdot \frac{dw}{dx}}{w - b}$$

$$= -\frac{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}{w - b}$$

5. Also

$$w - b = -\frac{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}{\frac{d^2w}{dx^2}}$$

d. h.

d. h. wegen (2)

$$w - b = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{1 + p^2}{q}$$

6. Demnach der Halbmesser der Krümmung (3)

$$\varrho = -\frac{(1 + p^2)\sqrt{(1 + p^2)}}{q}$$

oder $\varrho = -\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$.

Da nun $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, so sind in dem Ausdrucke für ϱ, die Größen p, q durch die Gleichung zwischen y und x, d. h. aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie, in jedem Falle leicht zu bestimmen. In die Differenzialquotienten p, und q, wird alsdann statt x die Abscisse gesetzt, welche zu dem gegebenen Punkte M der krummen Linie gehört.

Beyspiel.

7. An einem gegebenen Punkt eines Kegelschnittes den Halbmesser der Krümmung zu finden.

Für die Kegelschnitte ist

$$y^2 = \alpha x + \beta x^2 \quad (\S. 95.)$$

8. Also $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + 2\beta x}{2y}$ (das. 2.)

$$1 + p^2 = \frac{4y^2 + (\alpha + 2\beta x)^2}{4y^2}.$$

Folglich $(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{[4y^2 + (\alpha + 2\beta x)^2]^{\frac{3}{2}}}{8y^3}$

9. Ferner wegen $\frac{2y\,dy}{dx} = 2y \cdot p = \alpha + 2\beta x$ (8)

durch abermalige Differenziation

$2y\,dp + 2p\,dy = 2\beta\,dx$ oder

$y \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot \frac{dy}{dx} = \beta$, d. h. $y \cdot q + p^2 = \beta$.

Demnach $q = \frac{\beta - p^2}{y} = \frac{4\beta y^2 - (\alpha + 2\beta x)^2}{4y^3}$

10. Und folglich aus (8. 9) der Halbmesser der Krümmung (6)

$$\varrho = -\frac{[4y^2 + (\alpha + 2\beta x)^2]^{\frac{3}{2}}}{2[4\beta y^2 - (\alpha + 2\beta x)^2]}$$

Oder statt y^2 seinen Werth aus (7) gesetzt

$$\varrho = \frac{[\alpha^2 + 4\alpha(1+\beta)x + 4\beta(1+\beta)x^2]^{\frac{3}{2}}}{2\alpha^2}$$

Für

Für die Parabel ist $\beta = 0$ also

$$\varrho = \frac{(\alpha^2 + 4\alpha x)^{\frac{3}{2}}}{2\alpha^2} = \frac{(\alpha + 4x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\alpha}}$$

oder $\varrho = (\alpha + 4x)\sqrt{\frac{\alpha + 4x}{4\alpha}}$.

Also z. B. im Scheitelpunkte der Parabel d. h. für $x = 0$ wäre der Halbmesser der Krümmung $= \frac{1}{2}\alpha$, oder = dem halben Parameter.

Die Werthe von α, β, für Ellipse und Hyperbel sind (§. 95. I. 1.) angegeben, mit deren Substitution wir uns aber hier nicht weiter aufhalten wollen.

§. 100.

Zus. I. Da nach (§. 96.) $ds = dx\sqrt{(1 + p^2)}$ das Bogen-element am Punkte M der krummen Linie bezeichnet, so ergiebt sich hieraus noch ein anderer Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser, nämlich wegen $\frac{ds}{dx} = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ wird (§. 99. 7.)

$$\varrho = -\frac{ds^3}{q \cdot dx^3} = -\frac{ds^3}{dx^2\, dp}$$

Oder auch

$$\varrho = -\frac{ds^3}{dx^2 \cdot d\frac{dy}{dx}}$$

Zus. II. Zugleich erhellet aus (§. 57.), daß wenn man in den Ausdruck (§. 99. 6.) für den Krümmungs-Halbmesser, statt p den Werth $\frac{dy}{dx}$, und statt q den Werth $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}$ setzt, man einen Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser erhalten wird, in welchem statt dx constant zu setzen, jedes andere Differenzial constant gesetzt werden kann, ohnbeschadet des Werthes des Krümmungs-Halbmessers. Dies giebt statt $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ zugleich $\frac{ds^3}{dx^3}$ gesetzt, den Krümmungs-Halbmesser

$$\varrho = -\frac{ds^3}{dx\,ddy - dy\,ddx} \text{ (§. 99. 6.)}$$

Oder auch

$$\varrho = \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy}$$

Zus. III. Wird also z. B. dx constant gesetzt, so hat man

$$\varrho = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} \text{ wegen } ddx = 0.$$

Nimmt man aber dy unveränderlich, so hat man

$$\varrho = \frac{ds^3}{dy\,ddx} \text{ wegen } ddy = 0.$$

Und

Und nähme man ds unveränderlich, also auch $ds^2 = dx^2 + dy^2$ unveränderlich, so hätte man in dem Differenziale

$$2dds . ds = 2dx\,ddx + 2dy\,ddy$$

$dds = 0$. Mithin $ddy = -\frac{dx}{dy}ddx$.

Und folglich (Zus. II.)

$$\varrho = \frac{ds\,dy}{ddx}.$$

Oder auch wegen $ddx = -\frac{dy\,ddy}{dx}$

$$\varrho = -\frac{ds\,dx}{ddy}.$$

Alle diese noch so verschieden scheinende Ausdrücke für den Krümmungs-Halbmesser geben doch immer einerley Werth, so bald man aus der Gleichung für die krumme Linie die Werthe der Differenzialien ds, ddy, ddx sucht. Um es durch ein Beyspiel zu erläutern, so wollen wir die Formel $\varrho = \frac{ds . dy}{ddx}$ nehmen, bey der ds constant gesetzt worden, und sie durch die Parabel erläutern. Für diese ist also $y^2 = \alpha x$; mithin $dy = \frac{\alpha dx}{2y} = \frac{\alpha dx}{2\sqrt{\alpha x}}$; demnach ds^2 oder $dy^2 + dx^2 =$

$\left(\frac{\alpha^2}{4\alpha x} + 1\right) dx^2 = \frac{4x + \alpha}{4x} dx^2$. Soll nun ds und folglich auch ds^2 unveränderlich seyn, so muß $d\frac{4x + \alpha}{4x} dx^2 = 0$ seyn.

Dies giebt wegen $\frac{4x + \alpha}{4x} dx^2 = dx^2 + \frac{\alpha}{4x} dx^2$ durch abermahlige Differenziation

$$2\,dx\,ddx + \frac{\alpha}{4x} 2\,dx\,ddx - \frac{\alpha\,dx^3}{4x^2} = 0.$$

Oder überall mit $2dx$ dividirt

$$ddx = \frac{\alpha\,dx^2}{2(4x + \alpha)x}.$$

Substituirt man nun in den Ausdruck für ϱ den eben gefundenen Werth von ddx, so wie $\frac{dx\sqrt{(\alpha + 4x)}}{2\sqrt{x}}$ statt ds, und $\frac{\alpha\,dx}{2\sqrt{\alpha x}}$ statt dy, so findet sich sehr leicht

$$\varrho = (\alpha + 4x)\sqrt{\frac{\alpha + 4x}{4\alpha}}$$

völlig wie oben (§. 99. 10), da das Differenzial dx unveränderlich angenommen war.

Bey mathematischen Untersuchungen über diese oder jene Gegenstände, wobey die Betrachtung von Krümmungs-Halbmessern vorkömmt, ist es vortheilhaft, bald dieses bald jenes Differenzial unveränderlich anzunehmen. Deswegen sind die angeführten Formeln von sehr ausgebreitetem Nutzen. Sie setzen voraus, daß die Gleichung für die Curve zwischen senkrechten Coordinaten gegeben ist, die Abscissen-Linie mag übrigens, welche Lage man will, haben. Die folgende Aufgabe zeigt, den Halbmesser der Krümmung zu finden, wenn die Ordinaten aus einem Punkte gehen.

§. 101.

Aufgabe.

Es sey GAM (Fig. XIV.) eine krumme Linie, in welcher eine Gleichung zwischen dem veränderlichen Winkel ACM $= \varphi$ an einem gegebenen Punkte C, und dem Radius vector CM $=$ z gegeben ist, den Halbmesser der Krümmung an dem Punkte M zu finden.

Aufl. 1. Man gedenke sich durch den Punkt C, von welchem die radii vectores, oder Ordinaten wie CA, CM ꝛc. ausgehen, eine beliebige ge-

rade Linie CZ als Absciſſen-Linie gezogen, welche mit der Anfangs-Ordinate CA einen gegebenen Winkel $ACZ = \beta$ mache, und ziehe nun von M auf CZ, die Ordinate MP ſenkrecht auf die Absciſſen-Linie, ſo daß $CP = x$, und $PM = y$ ſenkrechte Coordinaten für den Punkt M darſtellen.

2. Man nenne der Kürze halber den Winkel $MCZ = \beta - \varphi = \psi$, ſo hat man

$$y = z \sin \psi$$
$$x = z \cos \psi.$$

3. Dieſe Werthe ſtatt x, y in die Gleichung für den Krümmungs-Halbmeſſer (§. 100. Z. II.) geſetzt, geben dieſen Halbmeſſer durch die Größen z, ψ, ſo, daß wenn alſo für den Punkt M dieſe Größen gegeben ſind, daraus der Krümmungs-Halbmeſſer gefunden werden kann.

4. Nun iſt durch Differenziation

$$dy = dz \sin\psi + z d\psi \cos\psi$$
$$dx = dz \cos\psi - z d\psi \sin\psi$$

woraus durch eine leichte Rechnung und mit Zuziehung des bekannten Satzes $\sin\psi^2 + \cos\psi^2 = 1$, ſich findet

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = dz^2 + z^2 d\psi^2.$$

5. Nun nenne man der Kürze halber $z d\psi = du$; also

$$dy = dz \sin\psi + du \cos\psi$$
$$dx = dz \cos\psi - du \sin\psi$$

so erhält man durch Differenziation

$$ddy = d^2z \sin\psi + dz\, d\psi \cos\psi - du\, d\psi \sin\psi + d^2u \cos\psi$$
$$ddx = d^2z \cos\psi - dz\, d\psi \sin\psi - du\, d\psi \cos\psi - d^2u \sin\psi$$

6. Aus diesen in (5) gefundenen Ausdrücken wird durch eine leichte Multiplikation, und wieder mit Zuziehung des Satzes $\sin\psi^2 + \cos\psi^2 = 1$, der Werth des Nenners von ϱ (§. 100. Zus. II.) d. h. $dy\,ddx - dx\,ddy = du\,ddz - dz\,ddu - dz^2 d\psi - du^2 d\psi$. Oder $z d\psi$ statt du und $z dd\psi + d\psi dz$ statt ddu gesetzt, $dy\,ddx - dx\,ddy = z d\psi\, ddz - z dz\, dd\psi - 2dz^2 d\psi - z^2 d\psi^3$, welches sich wegen $\psi = \beta - \varphi$, oder wegen $d\psi = - d\varphi$ und $dd\psi = - dd\varphi$ in $2dz^2 d\varphi + z dz\, dd\varphi + z^2 d\varphi^3 - z d\varphi\, ddz$ verwandelt.

7. Dies giebt denn endlich den Krümmungs-Halbmesser

$$\varrho = \frac{ds^3}{2dz^2 d\varphi + z dz\, dd\varphi + z^2 d\varphi^3 - z d\varphi\, ddz}$$

woraus sich wieder verschiedene Ausdrücke für ϱ herleiten lassen, je nachdem man dieses oder jenes Differenzial unveränderlich setzt.

Beyspiel.

8. Für die Archimedische Spiral-Linie (§. 95. Beysp. II.) hat man

$$z = \frac{r\varphi}{2\pi}.$$

Also $\quad dz = \frac{r}{2\pi} d\varphi.$

Und wenn man das Differenzial $d\varphi$ constant, also $dd\varphi = 0$ setzt, auch $ddz = \frac{r}{2\pi} dd\varphi = 0.$

Ferner $ds^2 = dz^2 + z^2 d\psi^2 = dz^2 + z^2 d\varphi^2 = \frac{r^2 + 4\pi^2 z^2}{4\pi^2} d\varphi^2$; also

$$ds = \frac{d\varphi \sqrt{(r^2 + 4\pi^2 z^2)}}{2\pi}.$$

Oder auch statt z seinen Werth gesetzt

$$ds = \frac{r d\varphi \sqrt{(1 + \varphi^2)}}{2\pi}.$$

Diese Werthe in den Ausdruck für ϱ gesetzt, geben den Krümmungs-Halbmesser (7)

$$\varrho = \frac{r}{2\pi} \cdot \frac{(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + \varphi^2}.$$

§. 102.

9. Zusatz I. Man kann dem Ausdrucke (7) für den Krümmungs-Halbmesser noch eine einfachere

chere Form geben, wenn man statt des Nenners daselbst, den Ausdruck (6) nämlich $duddz - dzddu - (dz^2 + du^2)d\psi$, und in diesem Ausdrucke $dz^2 + du^2 = ds^2$ setzt (4. 5). Dann hat man

$$\varrho = \frac{ds^3}{duddz - dzddu - ds^2 d\psi}.$$

Und nun $\frac{du}{z}$ statt $d\psi$ gesetzt

$$\varrho = \frac{zds^3}{zduddz - zdzddu - ds^2 du}.$$

Nun ist aber wegen $ds^2 = dz^2 + du^2$ durch Differenziation $dsdds = dzddz + duddu$, also $ddz = \frac{dsdds - duddu}{dz}$.

Dies statt ddz in den zuletzt gefundenen Werth von ϱ gesetzt, giebt

$$\varrho = \frac{zdzds^3}{zdudsdds - zdz^2ddu - zdu^2ddu - ds^2dudz}$$

Oder wegen $du^2 + dz^2 = ds^2$ in den beyden mittelsten Gliedern des Nenners von ϱ

$$\varrho = \frac{zdzds^2}{zdudds - zdsddu - dsdudz}$$

Oder auch

$$\varrho = -\frac{zdz}{d\left(\frac{zdu}{ds}\right)} = -\frac{zdz}{d\left(\frac{z^2d\psi}{ds}\right)} = \frac{zdz}{d\left(\frac{z^2d\varphi}{ds}\right)}$$

Un-

Unter welcher Form der Krümmungs-Halbmesser oft mit Vortheil gebraucht werden kann.

10. Zus. II. Man fälle von C (Fig. XIV.) das Perpendikel CQ auf die Tangente MT, so hat man, wenn CT senkrecht auf CM steht (§. 94.)

$$MT : CT = CM : CQ \text{ oder (§. 94.)}$$

$$\frac{z\sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}}{dz} : \frac{z^2 d\varphi}{dz} = z : CQ.$$

Also wenn statt $\sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}$ das Bogen-element ds gesetzt wird (4. 2.)

$$CQ = \frac{z^2 d\varphi}{ds}$$

Man nenne dies Perpendikel auf die Tangente $= t$, so hat man auch den Krümmungs-Halbmesser

$$\varrho = \frac{z\,dz}{dt}. \ (9)$$

11. Anmerkung I. Man pflegt den letzten Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser auch auf folgende Art zu erweisen.

Es sey m (Fig. XV.) ein Punkt der krummen Linie, unendlich nahe an M, also $Mm = ds$ ein Bogen-element, welches man zugleich als das Element des mit dem Krümmungs-Halbmesser MU beschriebenen Krümmungs-Kreises betrachtet.

Sind

Sind nun mq, MQ Tangenten an m, M, und Cq, CQ Perpendikel auf diese Tangenten, aus dem Punkte C, von welchem die Ordinaten ausgehen, so ist der Winkel Qμq beyder Tangenten (der sogenannte Krümmungs-Winkel) gleich dem Winkel MUm am Mittelpunkte des Krümmungs-Kreises.

Wenn nun m und M sich einander ohne Ende nähern, so nähern sich auch ohne Ende die Linien μq, μn, MQ, so daß man eine statt der andern setzen kann, so wie sich denn auch qn ohne Ende einem mit μq oder mq beschriebenen kleinen Kreisbogen nähert. Ferner kann man auch qn, als den Unterschied von Cq und CQ, d. h. als das Differenzial von CQ = t betrachten.

Da also die kleinen Kreisbogen qn = dt, und Mm = ds, gleichen Winkeln bey μ und U zugehören, so hat man

$$\frac{qn}{\mu q} = \frac{Mm}{MU}.$$

Oder auch

$$\frac{dt}{MQ} = \frac{ds}{\varrho}.$$

Also $\varrho = \frac{ds \,.\, MQ}{dt}$.

Nun

Nun ist aber MQ = CM cos CMQ

$$= z \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang}\, CMQ^2)}} = \frac{z}{\sqrt{\left(1 + \frac{z^2 d\varphi^2}{dz^2}\right)}}$$

$$(\S.\ 93.\ VI.) = \frac{z dz}{\sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}} = \frac{z dz}{ds}.$$

Daher $\varrho = \frac{z dz}{dt}$.

Aus diesem Ausdrucke kann man für den Krümmungs-Halbmesser rückwärts auch wieder die Formeln (9. 7.) ableiten, wenn man statt t den Werth $\frac{z^2 d\varphi}{ds}$ (10) oder auch $-\frac{z^2 d\psi}{ds}$ substituirt.

12. Anmerkung II. Uebrigens bedarf es keines Beweises, daß der Mittelpunkt des Krümmungs-Kreises allemal nach der Gegend genommen werden muß, nach welcher das Element der krummen Linie, zu dem er gehört, concav ist. Also z. B. bey einer krummen Linie, wie (Fig. XVI.), würde der Halbmesser der Krümmung bey M auf die durch M gezogene Normal-Linie nicht von M nach H, sondern M nach U zu genommen werden müssen. Bey S hingegen würde der Halbmesser der Krümmung von S nach K und nicht nach L zu fallen.

13. Um bestimmter urtheilen zu können, wo eine krumme Linie gegen eine nach Gefallen gezogene gerade Abscissen-Linie AZ concav oder convex ist, so soll M ein beliebiger Punkt der krummen Linie, und T T' eine Tangente an M; S ein anderer Punkt und $t\tau$ eine Tangente an S seyn.

PM = y sey die Ordinate für den Punkt M, zur Abscisse AP = x gehörig; pm = y'; $\pi\mu$ = y'' seyen die benachbarten Ordinaten, zu den Abscissen x — c und x + c gehörig. Man verlängere pm, $\pi\mu$, bis sie in die Tangente bey m', μ' einschneiden, so kann man pm' = z'; $\pi\mu'$ = z'' als Ordinaten der geraden Linie T T' betrachten, welche eben den Abscissen x — c und x + c entsprechen, indem zur Abscisse x die Ordinate PM = z = y gehöret.

Ist nun wie bey M

$$pm < pm', \text{ oder } y' < z'$$

$$\pi\mu < \pi\mu', \text{ oder } y'' < z''$$

so ist der Theil mMμ der krummen Linie gegen die Abscissen-Linie concav.

14. Sind hingegen, wie bey S, die zur krummen Linie gehörigen und dem Punkte S benachbarten Ordina-

dinaten, größer als die zur Tangente gehörigen, so ist der Theil der krummen Linie zunächst um S gegen die Abscissen-Linie convex. Nennt man also jetzt AQ=x, die Ordinaten der krummen Linie, y, y′, y″, und die der Tangente z, z′, z″, so ist die krumme Linie convex gegen die Abscissen-Linie, wenn

$$y' > z'$$

und $$y'' > z''$$

gefunden werden.

15. Man gedenke sich durch M eine Parallele mit der Abscissen-Linie gezogen, und nenne den Winkel, den die Tangente mit der Abscissen-Linie macht $= \eta$, so ist $\tan \eta = \frac{dy}{dx}$, und wie man leicht finden wird, $z'' = z + c \tan \eta = z + \frac{c\,dy}{dx}$ $= z + cp$ (wenn $\frac{dy}{dx} = p$ genannt wird), oder auch $z'' = y + cp$, weil für den Punkt M, $z = y$ ist. Eben so wird $z' = y - cp$.

16. Nun hat man nach dem Taylorischen Lehrsatz

$$y'' = y + cp + \frac{c^2}{2} q + \frac{c^3}{1.2.3} r + \frac{c^4}{1.2.3.4} s \text{ etc.}$$

$$y' = y - cp + \frac{c^2}{2} q - \frac{c^3}{1.2.3} r + \frac{c^4}{1.2.3.4} s \text{ etc.}$$

Oder

Oder (15)

$$y'' = z'' + \frac{c^2}{2} q + \frac{c^3}{1.2.3} r + \frac{c^4}{1.2.3.4} s \text{ ꝛc.}$$

$$y' = z' + \frac{c^2}{2} q - \frac{c^3}{1.2.3} r + \frac{c^4}{1.2.3.4} s \text{ ꝛc.}$$

Wird nun c so klein genommen, daß die Glieder, worin die höhern Potenzen von c vorkommen, gegen dasjenige, worin c^2 vorkömmt, verschwinden, so hat man schlechtweg

$$y'' = z'' + \frac{c^2}{2} q$$

$$y' = z' + \frac{c^2}{2} q.$$

17. Ist also q oder $\frac{ddy}{dx^2}$ positiv, so ist $y'' > z''$ und zugleich $y' > z'$. Mithin die krumme Linie convex gegen die Abscissen-Linie, vorausgesetzt, daß die Ordinaten y, y', y'', z, z', z'', alle positiv sind.

18. Sind sie negativ, so ist der Größe nach eigentlich $y'' < z''$ und $y' < z'$, wenn q positiv ist; mithin für diesen Fall die krumme Linie concav gegen die Abscissen-Linie. (14)

19. Eben so findet man leicht, daß wenn q negativ ist und die Ordinaten positiv, die krumme

Linie gegen die Abscissen-Linie concav ist, hingegen convex, wenn q negativ und die Ordinaten ebenfalls negativ sind.

20. Dies läßt sich kurz so ausdrücken. Wenn $q = \frac{d^2 y}{dx^2}$ mit den Ordinaten y einerley Zeichen hat, also das Produkt $q \cdot y = \frac{y d d y}{dx^2}$ positiv ist, so ist die krumme Linie an der Stelle, wo ihr die Ordinate y entspricht, convex gegen die Abscissen-Linie. Haben aber q und y verschiedene Zeichen, ist also das Produkt $q \cdot y = \frac{y d d y}{dx^2}$ negativ, so ist die krumme Linie concav gegen die Abscissen-Linie. Es versteht sich, daß der Quotient $\frac{d d y}{dx^2}$ für die zur Ordinate y gehörige Abscisse x genommen werden muß.

21. Es könnte aber für einen gewissen Werth der Abscisse x auch $\frac{d d y}{dx^2}$ oder $q = 0$ werden.

Für diesen Fall wäre dann in (16)

$$y'' = z'' + \frac{c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} r \text{ ꝛc.}$$

$$y' = z' - \frac{c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} r \text{ ꝛc.}$$

wenn

wenn jetzt die auf r folgenden Glieder weggelassen werden.

Nunmehr ist nie zugleich $y'' > z''$ und $y' > z'$, noch auch $y'' < z''$ und $y' < z'$, wie es die Bedingungen der Convexität oder Concavität erfordern.

22. Die krumme Linie kann also, wenn $q = 0$, und nicht zugleich auch $r = 0$ ist, gegen die Abscissen-Linie weder concav noch convex seyn. Sie hat alsdann an der Stelle s, für welche der Quotient q oder $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ wird, einen sogenannten Wendungspunkt, d. h. an dieser Stelle ist der Uebergang von der Concavität zur Convexität oder umgekehrt.

23. Ist aber für $q = 0$ auch zugleich $r = 0$, dann wird sie gegen die Abscissen-Linie convex seyn, wenn das Produkt $y \cdot s$ oder $\frac{yd^4y}{dx^4}$ positiv ist, hingegen concav, wenn es negativ ist, welches sich auf eine ähnliche Weise, wie (19) erweisen läßt u. s. w.

24. Die bisherigen Betrachtungen setzen voraus, daß die Differenzialquotienten q, r, s ꝛc. endliche Werthe haben, wie es gewöhnlich der Fall ist. Sind sie aber unendlich, so läßt sich die Taylorische

Reihe so wenig als bey der Lehre vom Größten und Kleinsten anwenden (§. 90). In diesem Falle muß man die Ordinaten, wie y, y'', y', z'', z' für die gegebenen Abscissen x, x + c, x − c unmittelbar aus der gegebenen Funktion y berechnen, und dann nach den Bedingungen (13. 14.) die Concavität oder Convexität beurtheilen, wenn man nicht etwa noch andere Betrachtungen zu Hülfe nehmen will, welche aber für den gegenwärtigen Zweck zu weitläuftig seyn würden. Ich habe nur in mehreren Beyspielen die so fruchtbare Anwendung des Taylorischen Lehrsatzes zeigen wollen.

25. Wo eine krumme Linie einen Wendungspunkt hat, ist der Krümmungs-Halbmesser

$$\varrho = -\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (§. 99. 6.)$$

wegen $q = 0$ (21), allemahl unendlich. Indessen wird er es auch für $p = \infty$, wenn q endlich ist.

Ende der Differenzialrechnung.

TAB. I.

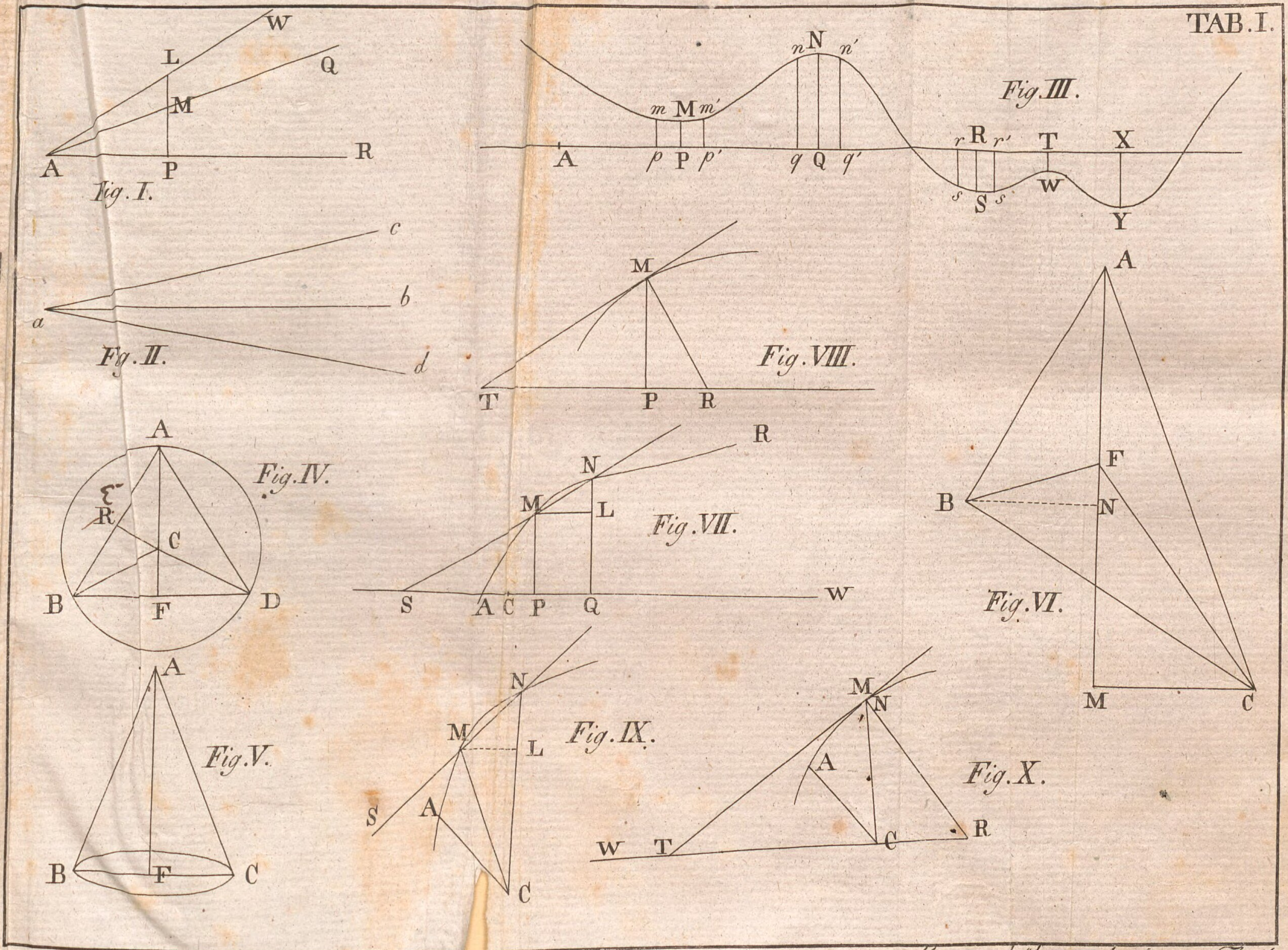


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.

[illegible]
e
[illegible]
r
g
[illegible]
n
n

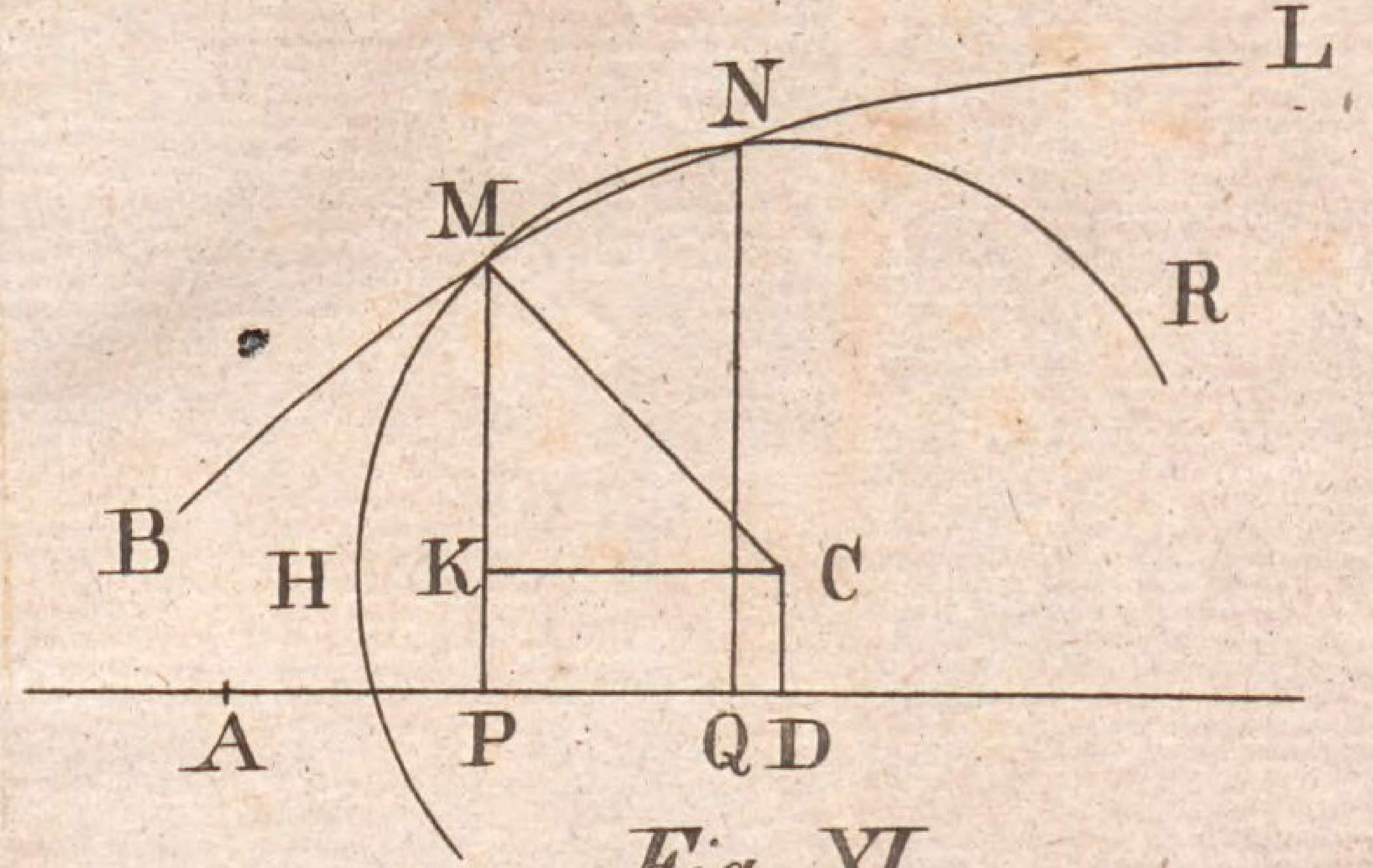


Fig. XI.

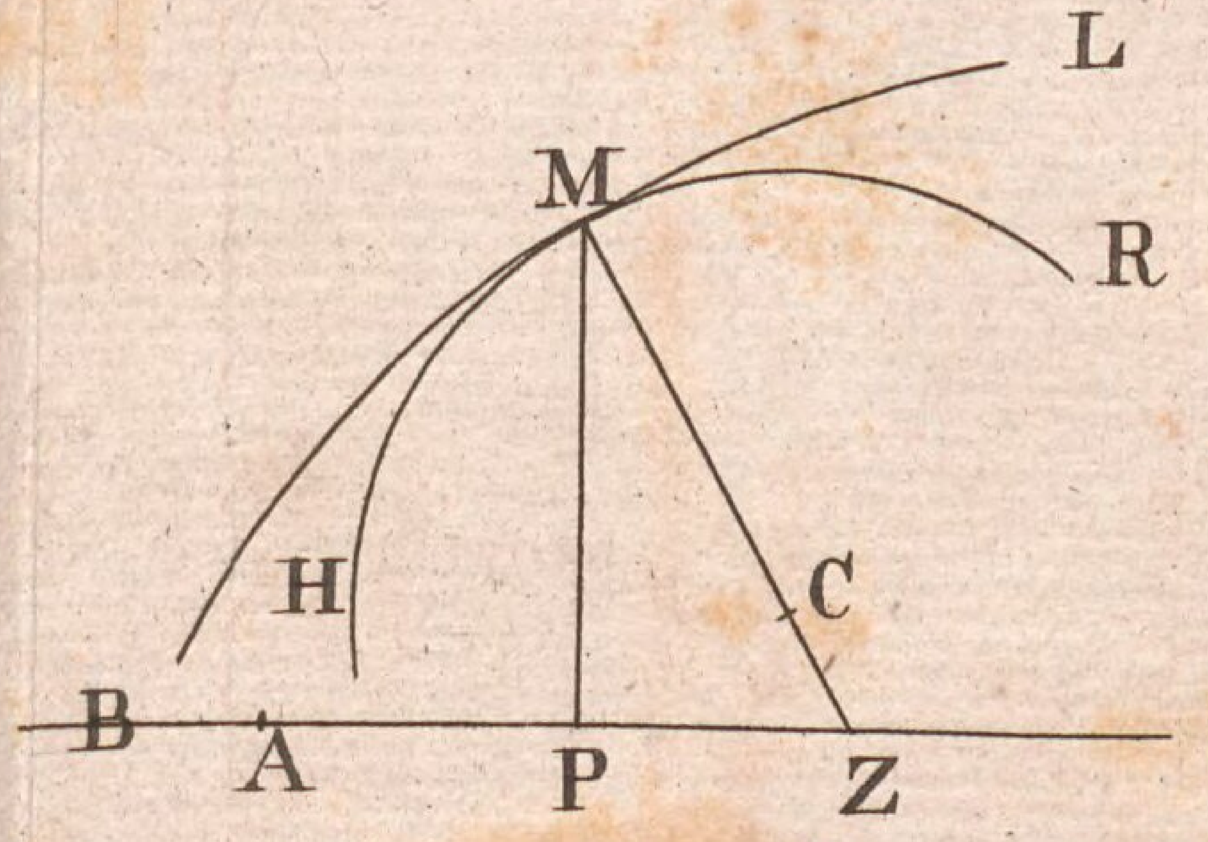


Fig. XII.

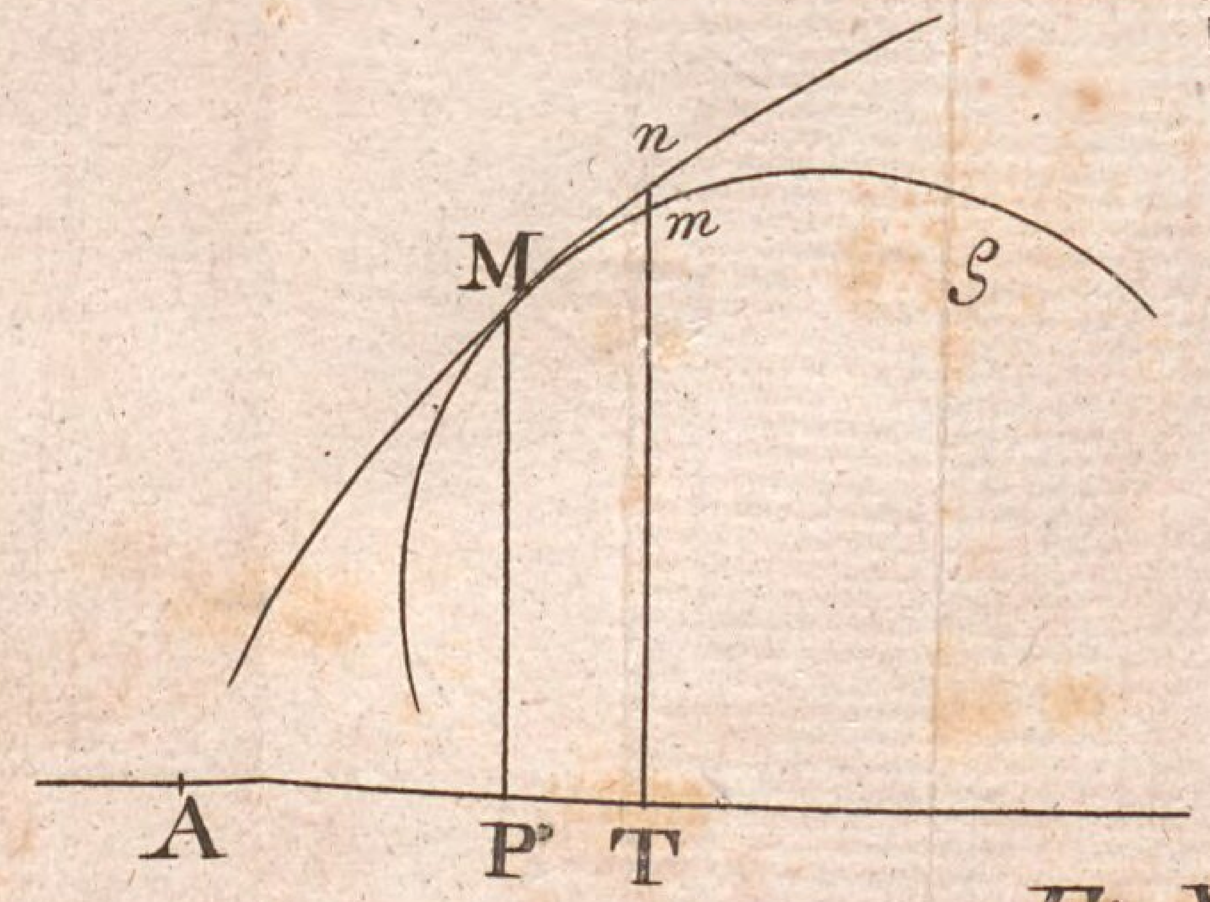


Fig. XIII.

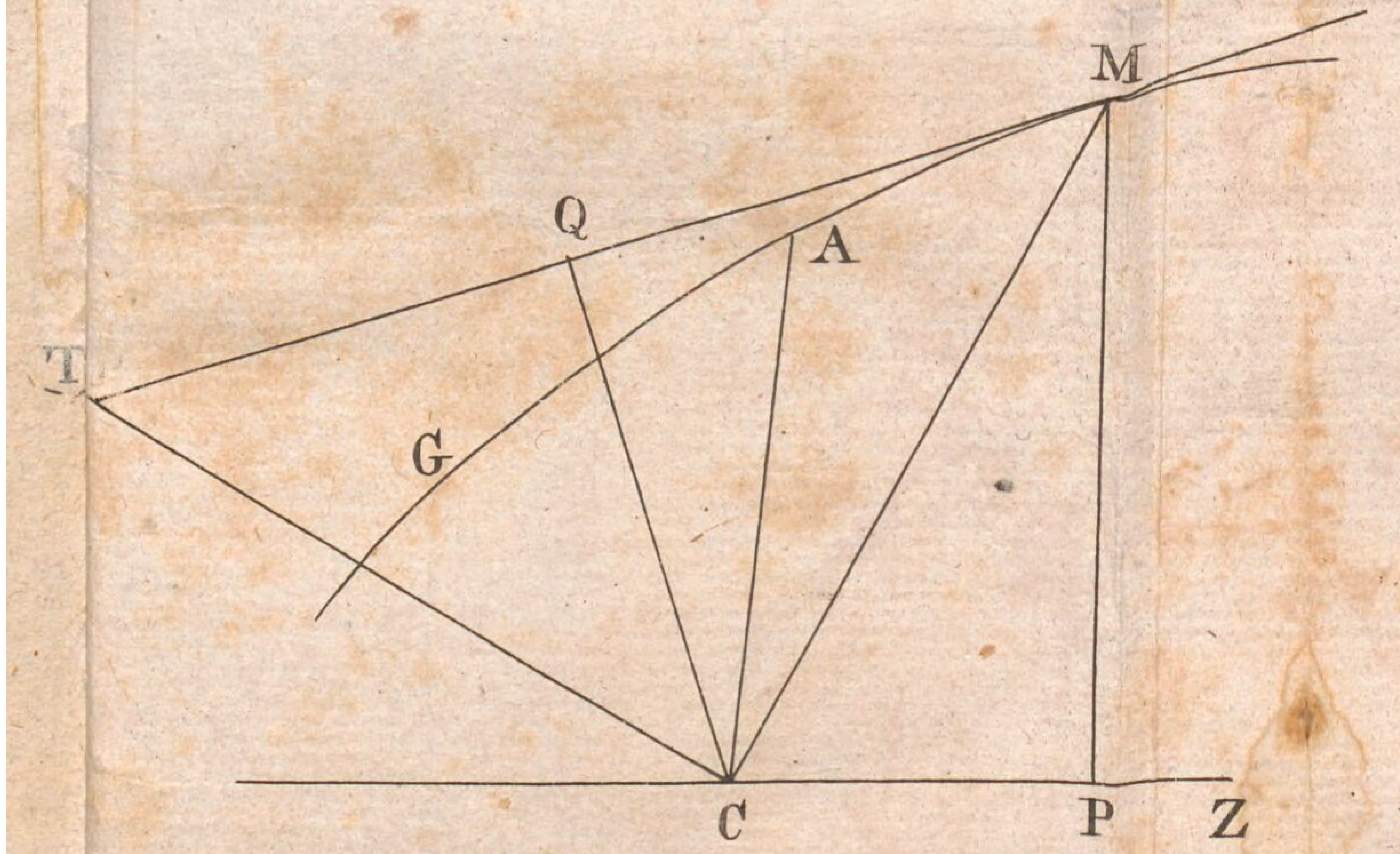


Fig. XIV.

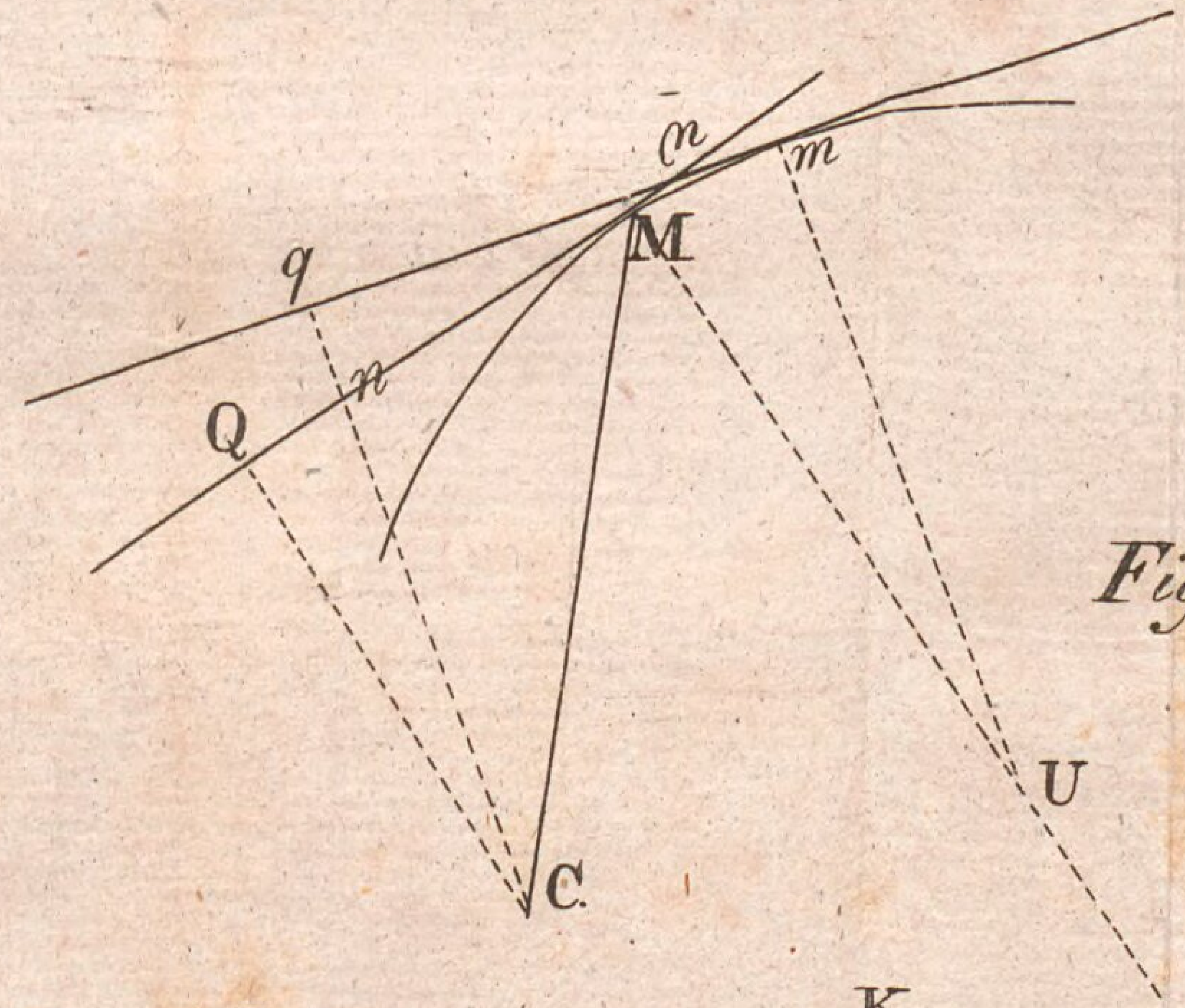


Fig. XV.

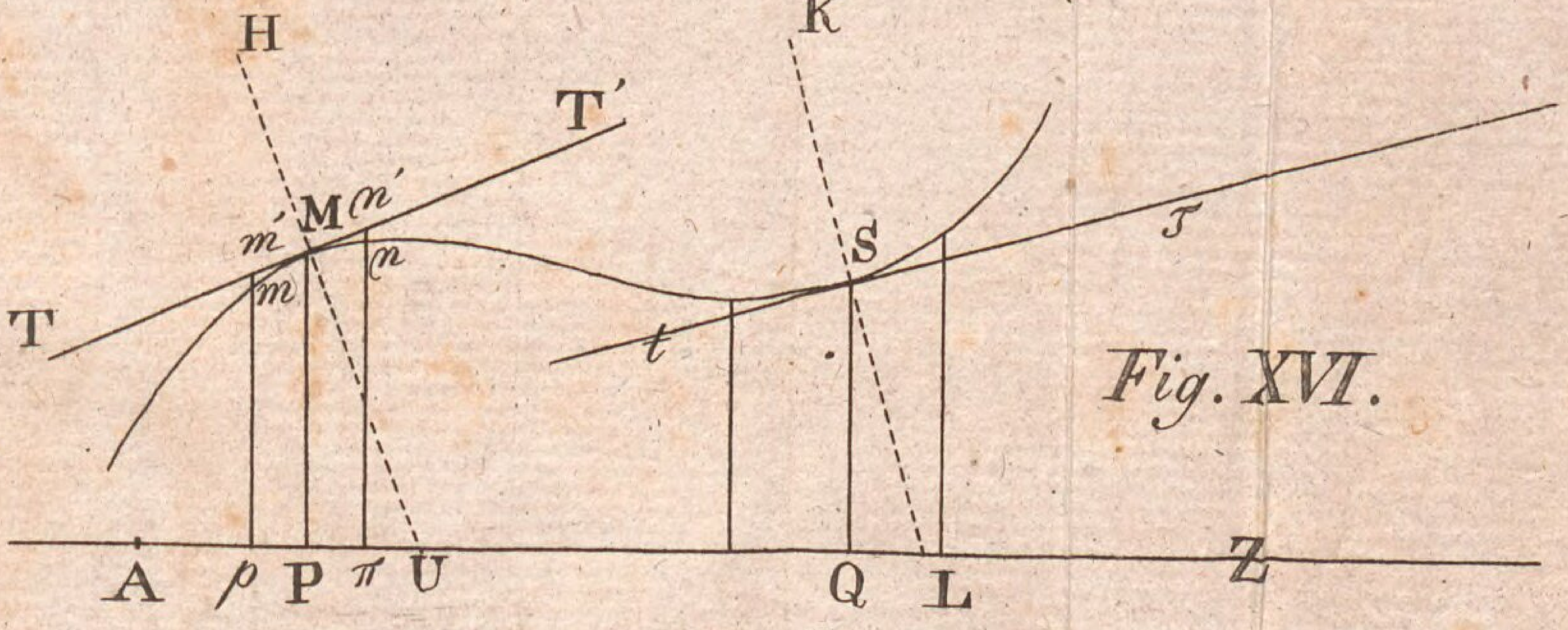


Fig. XVI.

B

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mayer, Johann Tobias,

Vollständiger Lehrbegriff der höhern Analysis

Bd.: 1

Göttingen 1818

Math.p. 338 q-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082386-8